Relaciones Recursivas

Aquí trataremos de recuperar la idea de que una relación es *efectivamente decidible,* con la noción de *recursividad.* Para ello nos ayudaremos de las noción de función recursiva. Antes un poco de notación.

Por una *Relación* R, entenderemos que $R \subseteq \mathbb{N}^n$ para algún $n > 0$. Usaremos las letras mayúsculas: $R, S, T, \ldots$ como metavariables para las relaciones. Escribiremos $R(a_1, \ldots, a_n)$ en lugar de $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R$ y eventualmente, cuando esté claro cual es la aridad, $R(\overline{a})$.

Definición$_1$. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^n$. Una función f_R es una *Función Representante* de la relación R syss

$$f_R : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$$
$$\forall x_1 \ldots x_n \left[f_R(x_1 \ldots x_n) = 0 \text{ syss } R(x_1 \ldots x_n) \right]$$

Es obvio que una relación tiene varias funciones representantes. A la que sólamente toma valores de 0 o de 1 es la función característica y la denotaremos por $\mathcal{C}_R$. Así,

$$\mathcal{C}_R(\overline{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \overline{x} \in R \\ \\ 1 & \text{si } \overline{x} \notin R \end{cases}$$

Por lo general la función característica se define de otra manera (0 si NO y 1 si SI) sin embargo, conviene para nuestros propósitos tomarla de ésta manera.

Definición$_2$. Una relación R es una *Relación Recursiva (Primitiva)* syss R tiene una función representante recursiva (primitiva).

Ejemplos: Son relaciones recursivas las siguientes:

1. $a = b$: $f_=(x,y) = |\, x - y \,|$ $\quad \left(\mathcal{C}_= = sg\left(|\, x - y \,| \right) \right)$.
2. $a \leq b$: $f_\leq(x,y) = x \dot{-} y$ $\quad \left(\mathcal{C}_\leq(x,y) = sg(x \dot{-} y) \right)$.
3. $a < b$: $\mathcal{C}_<(x,y) = \overline{sg}\left(y \dot{-} x \right)$.
4. $a \mid b$: $\mathcal{C}_|(x,y) = sg\left(res\left(y, x \right) \right)$.
5. $PRM = \left\{ x \;/\; x \text{ es un número primo} \right\}$ (**TAREA**)

Proposición$_3$. Una relación es recursiva syss su función característica lo es.
Prueba: Si R es recursiva, hay una función representante, digamos f_R, la cual es

recursiva. Pero entonces la función,

$$\mathcal{C}_R(\overline{x}) = sg(f_R(\overline{x}))$$

se obtiene por sustitución de las recursivas sg y f_R, por lo que es recursiva.
El "regreso" es trivial. †

Definición$_4$. Sean $R,\ S \subseteq \mathbb{N}^n$. Definimos las siguientes relaciones de la misma aridad.

a). $\neg R = \mathbb{N}^n \setminus R = \left\{ \left\langle x_1, \ldots, x_n \right\rangle \in \mathbb{N}^n \ / \ \left(x_1, \ldots, x_n \right) \notin R \right\}$.

b). $R \vee S = R \cup S = \left\{ \left\langle x_1, \ldots, x_n \right\rangle \in \mathbb{N}^n \ / \ R\left(x_1, \ldots, x_n \right) \text{ o } S\left(x_1, \ldots, x_n \right) \right\}$.

c). $R \wedge S = R \cap S = \left\{ \left\langle x_1, \ldots, x_n \right\rangle \in \mathbb{N}^n \ / \ R\left(x_1, \ldots, x_n \right) \text{ y } S\left(x_1, \ldots, x_n \right) \right\}$.

d). $R \Rightarrow S = \ \ldots$

e). $R \Leftrightarrow S = \ \ldots$

En forma natural se generalizan la $\vee$ y $\wedge$ para relaciones que tienen distintas aridades, teniendo el cuidado "necesario" para las variables distintas. Por ejemplo: si x,y,z y u son todas distintas, la relación $R(x,y,z) \vee S(x,u)$ definirá una nueva relación de aridad 4, digamos $T(x,y,z,u)$.

Proposición$_5$. Sean $R,\ S \subseteq \mathbb{N}^n$. Si R y S son relaciones recursivas entonces también lo son $\neg R,\ R \vee S$ y $R \wedge S$.
Prueba: Sean $\mathcal{C}_R$ y $\mathcal{C}_S$ las funciones características de R y S respectivamente. Así,

a). $$\mathcal{C}_{\neg R}\left(x_1, \ldots, x_n \right) = 1 \dot{-} \mathcal{C}_R\left(x_1, \ldots, x_n \right) = \overline{sg}\left(\mathcal{C}_R\left(x_1, \ldots, x_n \right) \right)$$

b). $$\begin{aligned} \mathcal{C}_{R \vee S}\left(x_1, \ldots, x_n \right) &= \mathcal{C}_R\left(x_1, \ldots, x_n \right) \cdot \mathcal{C}_S\left(x_1, \ldots, x_n \right) \\ &= min\left\{ \mathcal{C}_R\left(x_1, \ldots, x_n \right) \ , \ \mathcal{C}_S\left(x_1, \ldots, x_n \right) \right\} \end{aligned}$$

c). $$\begin{aligned} \mathcal{C}_{R \wedge S}\left(x_1, \ldots, x_n \right) &= sg\left(\mathcal{C}_R\left(x_1, \ldots, x_n \right) + \mathcal{C}_S\left(x_1, \ldots, x_n \right) \right) \\ &= max\left\{ \mathcal{C}_R\left(x_1, \ldots, x_n \right) \ , \ \mathcal{C}_S\left(x_1, \ldots, x_n \right) \right\} \end{aligned}$$

†

Dada una relación $R \subseteq \mathbb{N}$, si por $\exists y\ R(y)$ entendieramos la (nueva) relación: Hay un natural y tal que $R(y)$, ésta resulta que en general **no** es decidible (¿por qué?) y por tanto (???) no debería ser recursiva. Podemos modificar el cuantificador a uno acotado y esta resulta una mejor alternativa.

Definición$_6$. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$. Por $\exists y \leq v\, R(\overline{x}, y)$ entenderemos la nueva relación:

Hay un $y \in \mathbb{N}$, tal que $y \leq v$ y $R(\overline{x}, y)$

la cual es de aridad $n + 1$ (está en función de $\overline{x}$ y v).

Proposición$_7$. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$. Si R es una relación recursiva, entonces la relación $\exists y \leq v\, R(\overline{x}, y)$ también lo es.

Prueba: Sea $Q(\overline{x}, v) \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ dada por: $Q(\overline{x}, v)$ syss $\exists y \leq v\, R(\overline{x}, y)$. La función característica de $\mathcal{C}_Q$, queda dada por,

$$\mathcal{C}_Q(\overline{x}, v) = \prod_{y \leq v} \mathcal{C}_R(\overline{x}, y)$$

†

En forma muy similar tenemos el cuantificador universal acotado:

Definición$_8$. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$. Por $\forall y \leq v\, R(\overline{x}, y)$ entenderemos la relación:

Para todo $y \in \mathbb{N}$, si $y \leq v$, entonces $R(\overline{x}, y)$.

Proposición$_9$. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$. Si R es una relación recursiva, entonces $\forall y \leq v\, R(\overline{x}, y)$ también.

Prueba: Sea $S(\overline{x}, v) \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ dada por: $S(\overline{x}, v)$ syss $\forall y \leq v\, R(\overline{x}, y)$. La característica de S queda dada por:

$$\mathcal{C}_S(\overline{x}, v) = sg\left(\sum_{y \leq v} \mathcal{C}_R(\overline{x}, y)\right)$$

Otra prueba sería:

$$S(\overline{x}, v) \text{ syss } \neg\left(\exists y \leq v\, \neg R(\overline{x}, y)\right)$$

†

TAREA: $\exists y < v\, R(\overline{x}, y)$ y $\forall y < v\, R(\overline{x}, y)$.