Operador μ

El operador μ es una función que a las relaciones les asocia un número:

Definición$_1$. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ con la propiedad de que para cada $\overline{x} \in \mathbb{N}^n$ hay un $y \in \mathbb{N}$ con la propiedad de que $R(\overline{x},y)$. Así,

$$\mu_y\, R(\overline{x},y) = min\left\{y \in \mathbb{N}\ /\ R(\overline{x},y)\right\}$$

(Para Méndelson: $\mu_y(f(\overline{x},y) = 0)$: *Recusión General).*

Hay discusión acerca de la calculabilidad efectiva del operador así definido, pero al acotarlo es posible obtener recursividad.

Definición$_2$. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$.

$$\mu_{y<v}\, R(\overline{x},y) = \begin{cases} \mu_y\, R(\overline{x},y) & \text{si hay un } y < v \text{ tal, que } R(\overline{x},y) \\ \text{o} & \\ v & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(Se elige el valor de $v,$ en el segundo caso, por conveniencia. Nótese que $\mu_{y<0}\, R(\overline{x},y) = 0$).

Proposición$_1$. Si $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ es una relación recursiva, entonces $\mu_{y<v}\, R(\overline{x},y)$ es una función recursiva.
Prueba: Sea $f : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por: $f(\overline{x},v) = \mu_{y<v}\, R(\overline{x},y)$. Así,

$$f(\overline{x},v) = \sum_{y<v}\left(\prod_{u\leq y} \mathcal{C}_R(\overline{x},u)\right)$$

†

Definición$_3$. Sea $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$.

$$\mu_{y\leq v}\, R(\overline{x},y) = \mu_{y<v+1}\, R(\overline{x},y)$$

Proposición$_2$. Si $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ es una relación recursiva, entonces $\mu_{y\leq v}\, R(\overline{x},y)$ es una función recursiva.
Prueba: **TAREA**.

Ejemplos:

1. Sea $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una enumeración de todos los primos en forma ascendente. Así,

$$p(0) = 2,\ p(1) = 3,\ \ldots$$

Escribiremos P_n en lugar de $p(n)$.
Tenemos que esta enumeración es recursiva pues:

$$\begin{aligned} P_0 &= 2 \\ P_{n^+} &= \mu_{y<2\cdot P_n}\Big(PRM(y) \ \wedge \ P_n < y\Big) \end{aligned}$$

2. Sabemos que si $n > 1$, entonces tiene una única factorización, salvo permutaciones, en potencias de números primos. Nos conviene pensar ésta factorización como "infinita" y ordenada en forma creciente, es decir, *convenimos que todo natural n, $n > 1$, se puede escribir de la siguiente manera*,

$$n = P_0^{a_0} \cdot P_1^{a_1} \cdot \ \ldots \ \cdot P_k^{a_k} \cdot P_{k+1}^{a_{k+1}} \cdot \ \ldots$$

donde todos los exponentes, los a_i's, exepto un número finito, son cero.

Sin pérdida alguna, podemos incluir al número 1 como sigue,

$$1 = P_0^0 \cdot P_1^0 \cdot \ \ldots \ \cdot P_k^0 \cdot P_{k+1}^0 \cdot \ \ldots$$

Ahora, para cada $j \in \mathbb{N}$, definimos la función $[n]_j$ como el exponente del j-ésimo primo en la descomposición –nuestra descomposición– de n. En nuestro ejemplo, sería $[n]_j = a_j$. Otra convención más, $[0]_j = 0$ para toda j.

Podemos describir dicha función de la siguiente manera:

$$[\ \ ]_j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$[x]_j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \\ a_j & \text{si} \quad x = P_0^{a_0} \cdot P_1^{a_1} \cdot \ \ldots \ \cdot P_j^{a_j} \cdot P_{j+1}^{a_{j+1}} \cdot \ \ldots \end{cases}$$

Ésta es recursiva pues,

$$[x]_j = \mu_{y<x}\Big(\neg\Big(P_j^{y+1} \ \mid \ x\Big)\Big)$$

Observaciones. Gracias a la definición del operador μ tenemos,

a). Si $\neg(P_j \mid x)$, para $x > 0$, se tiene que

$$[x]_j = 0 \qquad \text{y} \qquad \mu_{y<x}\Big(\neg\Big(P_j^{y+1} \ \mid \ x\Big)\Big) = 0$$

b). Para el caso $x = 0$ tenemos,

$$[0]_j = 0 \qquad \text{y} \qquad \mu_{y<0}\Big(\neg\Big(P_j^{y+1} \ \mid \ 0\Big)\Big) = 0$$

3. Para un $a > 1$, nos interesará saber el número de primos —distintos— que lo dividen, o equivalentemente, el número de exponentes no–cero en la factorización en potencias de números primos. A éste número lo denotaremos por $ld(a)$. Arbitrariamente, y para tenerla definida para todo natural, pondremos que $ld(0) = 0 = ld(1)$. Veamos que ld es una función recursiva:

a). $ld(x) = \sum_{j \leq x} sg\big([x]_j\big)$. Recordar que, $[x]_i = 0$ syss $\neg(P_i \mid x) \vee (x < 2)$.

b). Sea $R(x,y)$ syss $PRM(y) \wedge (y \mid x) \wedge (x \neq 0)$. Así,

$$ld(x) = \sum_{y \leq x} \overline{sg}\left(\mathcal{C}_R(x,y) \right)$$

Obsérvese que con esta definición, $ld(0) = \overline{sg}\left(\mathcal{C}_R(0,0) \right) = 0$ y $ld(1) = \overline{sg}\left(\mathcal{C}_R(1,0) \right) + \overline{sg}\left(\mathcal{C}_R(1,0) \right) = 0 + 0 = 0.$

4. Ahora nos interesa, para empezar, dado un número $a > 1$, saber el índice del (primer) primo que no lo divide y que ningun otro primo mayor lo divida. A éste número lo denotaremos por $lg(a)$. Con la convención que dimos queda que $lg(1) = 0$ y árbitrariamente escogemos que $lg(0) = 0$. Esta función de aridad 1 es recursiva pues,

$$lg(x) = \mu y_{y<x}\Big[\forall z_{z<x}\Big(z \geq y \Rightarrow \big(\neg(P_z \mid x)\big)\Big)\Big]$$

y como queríamos, $lg(1) = 0 = lg(0)$.

En estos dos últimos ejemplos, tanto a $ld(a)$ como a $lg(a)$, *indistintamente* les llamaremos la *Longitud de* a. La razón de ello quedará clara con el uso que les daremos. En particular para nuestro siguiente ejemplo.

5. Por el momento nos fijaremos en números tales que en su descomposición al aparecer un primo que no lo divide, todo primo mayor que éste, tampoco lo divide; es decir si, en su decomposición, aparece un exponente cero todos los posteriores exponentes son cero. Tomemos dos de estos, digamos

$$a = P_0^{a_0} \bullet P_1^{a_1} \bullet \ldots \bullet P_k^{a_k} \bullet P_{k+1}^{0} \bullet P_{k+2}^{0} \bullet \ldots \text{ y } b = P_0^{b_0} \bullet P_1^{b_1} \bullet \ldots \bullet P_l^{b_l} \bullet P_{l+1}^{0} \bullet P_{l+2}^{0} \bullet \ldots$$

(donde $a_i \neq 0$ y $b_j \neq 0$).

Ahora queremos definir, recursivamente, una función binaria, digamos $\star$, de tal suerte que

$$a \star b = P_0^{a_0} \bullet P_1^{a_1} \bullet \ \ldots \ \bullet P_k^{a_k} \bullet P_{k+1}^{b_0} \bullet P_{k+2}^{b_1} \bullet \ \ldots \ \bullet P_{k+1+l}^{b_l}$$

Dicha función queda expresada de la siguiente manera,

$$a \star b = P_0^{a_0} \bullet P_1^{a_1} \bullet \ \ldots \ \bullet P_k^{a_k} \bullet P_{lg(a)}^{[b]_0} \bullet P_{lg(a)+1}^{[b]_1} \bullet \ \ldots \ \bullet P_{lg(a)+(lg(b)-1)}^{[b]_{lg(b)-1}}$$

Veamos que $\star$ es una Función Recursiva, y que puede estar definida para cualquier par de números. Tenemos,

$$x \star y = x \cdot \prod_{j<lg(y)} P_{lg(x)+j}^{[y]_j}$$

A esta operación se le conoce con el nombre de *Concatenación.* Obsérvese que $x \star 0 = x \cdot 1 = x$ y $x \star 1 = x \cdot 1 = x$, por un lado y por otro lado, $0 \star y = 0$ y $1 \star y = y$.

Ejercicio:

1) $\star$ es asociativa y no conmutativa
2) ¿Qué pasa si usamos en la definición de $\star$ la función ld en lugar de lg ?

Veamos el último resultado de esta sección, cuya prueba se deja al lector.

Proposición. Sean $g_1, \ldots, g_m : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. Ahora consideremos las relaciones $R_1, \ldots, R_m \subseteq \mathbb{N}^n$ con la propiedad de que para cada $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ se tiene una y solo una de $R_1(\vec{x})$ o … o $R_m(\vec{x})$. Sea $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ la operación definida por casos, como sigue,

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} g_1(\vec{x}) & \text{si } R_1(\vec{x}) \\ g_2(\vec{x}) & \text{si } R_2(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots \\ g_m(\vec{x}) & \text{si } R_m(\vec{x}) \end{cases}$$

Si las operaciones $g_1, \ldots, g_m$ son Funciones Recursivas y las relaciones $R_1, \ldots, R_m$ son Relaciones Recursivas, entonces f es una Función Recursiva.

Prueba: **TAREA**. †