

18. $VOP \subseteq \mathbb{N}^3$. $VOP(n, m, p)$ syss la **Variable** v_n **Ocorre** en la AP -expresión con número de secuencia m , en la **Posición** p .

$$VOP(n, m, p) \text{ syss } ([m]_p = g_1(v_n))$$

19. $VOF \subseteq \mathbb{N}^2$. $VOF(n, m)$ syss la **Variable** v_n **Ocorre** en la AP -**Fórmula** con número de secuencia m .

$$VOF(n, m) \text{ syss } FORM(m) \wedge \exists y < lg(m) \left[VOP(n, m, y) \right]$$

20. **0)** $VOAP1 \subseteq \mathbb{N}^3$. $VOAP1(n, m, p)$ syss la **Variable** v_n **Ocorre** en la AP -expresión con número de secuencia m en la **Posición** p y es la variable del cuantificador universal $\forall v_n$.

$$VOAP1(n, m, p) \text{ syss } VOP(n, m, p) \wedge ([m]_{p-1} = g_1(\forall))$$

- 00)** $VOAP2 \subseteq \mathbb{N}^3$. $VOAP2(n, m, p)$ syss la **Variable** v_n **Ocorre** en la AP -expresión con número de secuencia m en la **Posición** p y está en el alcance del cuantificador universal $\forall v_n$.

$$\begin{aligned} VOAP2(n, m, p) \text{ syss } & VOP(n, m, p) \wedge \\ & \wedge \exists x < m \exists y < m \exists z < m \left[\left(m = x \star cu(n, y) \star z \right) \wedge \right. \\ & \left. \wedge VOP(n, y, p \dot{-} (lg(x) + 3)) \right] \end{aligned}$$

Obsérvese que queda contemplado el caso en que la fórmula, con número de secuencia m , sea la cuantificación universal $\forall v_n$ de otra fórmula (es el caso $x = 1 = z$ y recordando que $1 \star a = a = a \star 1$ y que $lg(1) = 0$).

- a) $VOAP \subseteq \mathbb{N}^3$. $VOAP(n, m, p)$ syss la **Variable** v_n **Ocorre Acotada** en la AP -expresión con número de secuencia m en la **Posición** p .

$$VOAP(n, m, p) \text{ syss } VOAP1(n, m, p) \vee VOAP2(n, m, p)$$

- b) $VOAF \subseteq \mathbb{N}^2$. $VOAF(n, m)$ syss la **Variable** v_n **Ocorre Acotada** en la AP -**Fórmula** con número de secuencia m .

$$VOAF(n, m) \text{ syss } FORM(m) \wedge \exists y < lg(m) \left[VOAP(n, m, y) \right]$$

21. a) $VOLP \subseteq \mathbb{N}^3$. $VOLP(n, m, p)$ syss la **Variable** v_n **Ocorre Libre** en la AP -expresión con número de secuencia m en la **Posición** p .

$$VOLP(n, m, p) \text{ syss } VOP(n, m, p) \wedge \neg VOAP(n, m, p)$$

- b) $VOLF \subseteq \mathbb{N}^2$. $VOLF(n, m)$ syss la **Variable** v_n **Ocorre Libre** en la AP -**Fórmula** con número de secuencia m .

En los casos en que, la variable no ocurra o sus ocurrencias sean todas acotadas o que no hubiera una k -ésima ocurrencia libre de la variable, el valor que tome la función pol no importa —con tal de que no nos meta en problemas. Una buena solución, y que nos servirá más adelante, es que tome como valor a la $lg(m)$.

En nuestro ejemplo, $pol(41, m, k) = lg(m) = 18$, para toda k . Y para toda $k \geq 1$, tendríamos que $pol(28, m, k) = lg(m) = 18$.

Podemos definir pol recursivamente, a partir de recursivas, como sigue:

$$pol(n, m, 0) = \mu_{y < lg(m)} \left[VOLP(n, m, y) \right]$$

$$pol(n, m, k^+) = \mu_{y < lg(m)} \left[VOLP(n, m, y) \wedge y > pol(n, m, k) \right]$$

- 26.** Queremos una función $nol : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, la cual trabaje de la siguiente manera: Si $nol(n, m) = l$, entonces la variable v_n **O**ccurre **L**ibre en la AP -expresión con número de secuencia m , un **N**úmero l de veces.

En el ejemplo anterior tendríamos:

$$nol(28, m) = 1, nol(35, m) = 2 \text{ y } nol(41, m) = 0.$$

La función nol es recursiva pues,

$$nol(n, m) = \sum_{y < lg(m)} \overline{sg} \left(C_{VOLP}(n, m, y) \right)$$

donde C_{VOLP} es la función característica de $VOLP$. Otra respuesta posible es,

$$nol(n, m) = \mu_{y < lg(m)} \left[pol(n, m, y) = lg(m) \right]$$

- 27.** Queremos una función $remp : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$, la cual trabaje de la siguiente manera: Si n y m son números de secuencia de dos AP -expresiones, digamos E y F respectivamente y si $remp(n, m, p) = k$, entonces k es el número de secuencia de la AP -expresión que se obtiene de E , al **RE**e**M**plazar el símbolo que ocurre en la **P**osición p , por la AP -expresión F .

Un ejemplo: Si $E \Leftarrow f_+(v_0, c_0) \approx c_0$ y $F \Leftarrow f_s(c_0)$ donde $g_2(E) = n$ y $g_2(F) = m$, entonces

$$remp(n, m, 3) = g_2 \left(f_+ \left(f_s(c_0), c_0 \right) \approx c_0 \right) \text{ y}$$

$$remp(n, m, 2) = g_2 \left(f_+ f_s(c_0) v_0, c_0 \approx c_0 \right)$$

La función $remp$ es recursiva pues,

$$remp(n, m, p) = \prod_{i < p} P_i^{[n]_i} \star m \star \prod_{j < lg(n) - p^+} P_j^{[n]_{j+p^+}}$$

¿ Qué ocurre si $p \geq lg(n)$?

$$R: remp(n, m, p) = (n \cdot 1) \star m \star 1 = n \star m.$$

28. a) Queremos una función $sus : \mathbb{N}^4 \rightarrow \mathbb{N}$ tal que si $sus(n, m, k, l) = o$, entonces o es el número de secuencia de la AP -expresión que resulta de **SU**stituir las primeras l ocurrencias libres de la variable v_m por la AP -expresión con número de secuencia k en la AP -expresión con número de secuencia n . La función sus queda definida recursivamente, a partir de recursivas, como sigue:

$$\begin{aligned} sus(n, m, k, 0) &= n \\ sus(n, m, k, l^+) &= remp(sus(n, m, k, l), k, pol(m, n, l) + l \cdot lg(k)) \end{aligned}$$

- b) Queremos una función $sst : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$. tal que si $sst(n, m, k) = z$, entonces z es el número de secuencia de la AP -expresión que resulta de **Su**stituir Todas las ocurrencias libres de la variable v_m por la AP -expresión con número de secuencia k en la AP -expresión con número de secuencia n .

$$sst(n, m, k) = sus(n, m, k, nol(m, n))$$

29. i) Axiomas Lógicos (segunda parte).

- d) $AL4(x)$ syss x es el número de secuencia de un axioma lógico del grupo **AL**₄ :

$$\begin{aligned} AL4(x) \text{ syss } \exists y < x \exists z < x \exists w < x \left[TLVF(y, z, w) \wedge \right. \\ \left. \wedge x = imp(cu(z, w), sst(w, z, y)) \right] \end{aligned}$$

- e) $AL5(x)$ syss x es el número de secuencia de un axioma lógico del grupo **AL**₅ :

$$\begin{aligned} AL5(x) \text{ syss } \exists y < x \exists z < x \exists w < x \left[FORM(y) \wedge FORM(z) \wedge \neg VOLF(w, y) \wedge \right. \\ \left. \wedge x = imp(cu(w, imp(y, z)), imp(y, cu(w, z))) \right] \end{aligned}$$

- g) $AL7(x)$ syss x es el número de secuencia de un axioma lógico del grupo **AL**₇ :

$$AL7(x) \text{ syss } \dots \text{ T A R E A.}$$

- ii) $AL \subseteq \mathbb{N}$.

$AL(x)$ syss x es el número de secuencia de un **Axioma Lógico**.

$$AL(x) \text{ syss } AL1(x) \vee \dots \vee AL7(x)$$

30. Axiomas Propios. Axiomas de Peano, AP (segunda parte).

i) $API(n)$ *syss* n es el número de secuencia de una fórmula perteneciente al grupo de axiomas de **PI** (Principio de Inducción).

$$API(n) \text{ syss } \exists x < n \exists y < n \left[FORM(x) \wedge VOLF(y,x) \wedge \right. \\ \left. \wedge n = imp\left(sst(x,y, 2^{g_1(c)}) , \right. \right. \\ \left. \left. imp\left(cu\left(y , imp\left(x , sst(x,y, 2^{g_1(f_s)} \star pp(2^{g_1(v_y)}) \right) \right) , cu(y,x) \right) \right) \right]$$

ii) $AAP \subseteq \mathbb{N}$.

$AAP(n)$ *syss* n es el número de secuencia de un axioma propio del sistema Axiomático de **AP**.

$$AAP(n) \text{ syss } AP1(n) \vee \dots \vee AP6(n) \vee API(n)$$

31. $PRU \subseteq \mathbb{N}^2$.

$PRU(n,m)$ *syss* n es el número de gödel de una sucesión finita de **AP**-fórmulas la cual es una prueba en el sistema —en nuestro caso el de Mendelson— de la fórmula con número de secuencia m .

$$PRU(n,m) \text{ syss } FOR(m) \wedge [n]_{lg(n)-1} = m \wedge \forall i < lg(n) \left[FOR([n]_i) \wedge \right. \\ \left. \wedge \left(AL([n]_i) \vee AAP([n]_i) \vee \exists j < i \exists k < i \left(MP([n]_j, [n]_k, [n]_i) \right) \right. \right. \\ \left. \left. \vee \exists j < i \left(GEN([n]_j, [n]_i) \right) \right) \right]$$



Surge la pregunta ¿la propiedad “ser un teorema, en AP ” es recursiva? Veamos:

$TEO \subseteq \mathbb{N}$. $TEO(m)$ *syss* m es el número de gödel de una fórmula la cual es un **TEO**rema, en el sistema AP .

Podríamos intentar ver que es recursivo, de la siguiente manera:

$$TEO(m) \text{ syss } \exists x \left[PRU(x,m) \right]$$

Pero el cuantificador ¡no lo podemos acotar! Esto nos impide el probar —por éste camino, al menos— que TEO sea una propiedad recursiva.

De hecho, TEO **NO** es recursiva. Queda pendiente probarlo.