β de Gödel

En esta sección construiremos el enunciado de Gödel el cual es un indecidible para nuestra axiomatización de la Aritmética, AP. Empezamos con la autoreferencia, o mejor dicho, con la “diagonalización”.

32. $nml : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
$nml(k)$ nos proporcional el número de secuencia del numeral del natural k, es decir: $nml(k) = g_2(\overline{k})$. Esta es recursiva, pues:

$$\begin{aligned} nml(0) &= 2^{g_1(c_0)} \\ nml(k^+) &= 2^{g_1(f_s)} \star pp(nml(k)) \end{aligned}$$

Definición₁. Dada una fórmula α, *la Diagonalización de* α *en la variable* v_k, es la fórmula que se obtiene al sustituir todas las ocurrencias libres de v_k en α, por el numeral del número de secuencia de α. Así, si $g_2(\alpha) = m$, entonces la diagonalización de α en v_k es $\alpha(v_k / \overline{m})$.

33. $diag : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.
Si m es el número de secuencia de una AP–expresión, digamos α, entonces $diag(m, k)$ nos dá el número de secuencia de la diagonalización de α *en* v_k.
Es recursiva, pues:

$$diag(m, k) = sst(m, k, nml(m))$$

34. $PR \subseteq \mathbb{N}^3$.
$PR(n, m, k)$ syss n es el número de gödel, g_3, de una sucesión de fórmulas la cual es una prueba, en el sistema AP, de la diagonalización de la formula con número de secuencia m, en la variable v_k. Esta es recursiva, pues:

$$PR(n, m, k) \quad \text{syss} \quad PRU(n, diag(m, k))$$

Tenemos que $PR \subseteq \mathbb{N}^3$ y es recursiva, por tanto, es expresable en AP por una fórmula con exactamente tres variables líbres, digamos $\alpha_{PR}(v_0, v_1, v_2)$. Así, si $n, m, k \in \mathbb{N}$, entonces:

R₁ Si $PR(n, m, k)$, entonces $AP \vdash \alpha_{PR}\left(v_0 / \overline{n}\ ,\ v_1 / \overline{m}\ ,\ v_2 / \overline{k}\right)$, o

R₂ Si $\neg PR(n, m, k)$, entonces $AP \vdash \neg\alpha_{PR}\left(v_0 / \overline{n}\ ,\ v_1 / \overline{m}\ ,\ v_2 / \overline{k}\right)$.

Consideremos ahora la siguiente fórmula, la cual tiene a v_1 como única variable libre:

$$\beta(v_1) \rightleftharpoons \forall v_0 \neg\alpha_{PR}\left(v_0 \ , \ v_1 \ , \ v_2 / \overline{1}\right)$$

Ahora tomemos la digonalización de $\beta(v_1)$ en v_1. Sea g el número de secuencia de $\beta(v_1)$ es decir, $g = g_2(\beta(v_1))$ y obtenemos el enunciado siguiente,

$$\beta\left(v_1 / \overline{g}\right) \rightleftharpoons \forall v_0 \neg\alpha_{PR}\left(v_0 \ , \ v_1 / \overline{g} \ , \ v_2 / \overline{1}\right)$$

Llamado *"La β de Gödel".*

Intentemos interpretar a la β en $\mathbb{N}$. Lo que "dice" es,

$$\dot{\forall}\ n \in \mathbb{N}, \neg PR\left(n, g, 1\right)$$

o bien,

$$\dot{\forall}\ n \in \mathbb{N}, \neg PRU\left(n, diag(g,1)\right)$$

Lo cual a su vez nos dice,

" $diag(g,1)$ " es indemostrable, en AP .

pero, $diag(g,1) = g_2\left(\beta\left(v_1 / \overline{g}\right)\right)$; por lo que la lectura es,

" $\beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$ es indemostrable en AP "

Resumiendo, $\beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$ dice, *bajo nuestra particular interpretación,*

"soy indemostrable, en AP"

Efectivamente, como veremos, el enunciado $\beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$ no se puede demostrar en AP y no solo eso, tampoco se puede refutar, es decir su negación, $\neg\beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$, también es indemostrable en AP. Es pues, un enunciado indecidible para AP. Todo ello bajo la suposición de "cierta" consistencia de AP. Esto es el **Primer Teorema de Incompletud de Gödel** (1931). Lo probaremos en dos oportunidades.

Proposición$_{\aleph}$. (Parte **I**).

Si AP es consistente, entonces $AP \nvdash \beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$.

Prueba: Se hará por contrapositiva.

Supongamos pues, que $AP \vdash \beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$. Así, hay $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in FRM_{AP}$, que forman una demostración de $\alpha_k \rightleftharpoons \beta\left(v_1 / \overline{g}\right)$, en el sistema AP. Sea $n_0 = g_3(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, por tanto:

$$PRU\Big(n_0 \ , \ g_2\big(\beta\big(v_1 / \overline{g}\big)\big)\Big)$$

pero, ya que $g_2\big(\beta\big(v_1 / \overline{g}\big)\big) = diag\big(g, 1\big)$, tenemos:

$$PRU\Big(n_0 \ , \ diag\big(g, 1\big)\Big)$$

y por tanto,

$$PR\big(n_0, g, 1\big)$$

Ahora bien, como α_{PR} expresa a PR en AP, por **R₁**, tenemos:

$$AP \vdash \alpha_{PR}\Big(v_0 / \overline{n_0} \ , \ v_1 / \overline{g} \ , \ v_2 / \overline{1}\Big)$$

pero, gracias a la regla $\exists$ —válida en nuestro cálculo de predicados— obtenemos,

$$AP \vdash \exists v_0 \alpha_{PR}\Big(v_0 \ , \ v_1 / \overline{g} \ , \ v_2 / \overline{1}\Big)$$

es decir,

$$AP \vdash \neg\forall v_0 \neg\alpha_{PR}\Big(v_0 \ , \ v_1 / \overline{g} \ , \ v_2 / \overline{1}\Big)$$

que no es otra cosa que,

$$AP \vdash \neg\beta\big(v_1 / \overline{g}\big)$$

Y así, AP es inconsistente. †

Bajo nuestra “peculiar lectura” resulta que “el enunciado β es verdadero y no es demostrable, en la Aritmética de Peano”.

Bien querríamos concluir que ¡la Aritmética de Peano es Incompleta! —bajo la suposición de que es Consistente. Sin embargo, dar una interpretación rigurosa, a la Tarski, del enunciado β en la interpretación canónica, $\langle \mathbb{N}, \ + \ , \ \cdot \ , \ s \ , \ 0 \rangle$, es casi imposible y por consiguiente no podemos saber si éste es verdadero o es falso.

Lo único que tenemos con nuestra “lectura” son argumentos de plausibilidad de que sea verdadero. Lo que debemos de rescatar de la “lectura”, un valor innegable, es la idea subyacente, que fué la que llevó a Gödel a construirla.

Para la siguiente parte del resultado, necesitamos introducir una nueva noción.

Definición₂. El sistema axiomático AP es ω–*Consistente* syss para cualquier AP–fórmula $\varphi(x)$ se tiene,

Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $AP \vdash \varphi\big(x / \overline{n}\big)$, entonces $AP \nvdash \neg\forall x\, \varphi\big(x \big)$

Observaciones.

a). Son equivalentes:

1. AP es ω–Consistente.

2. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $AP \vdash \varphi(x / \overline{n})$, entonces $AP \nvdash \exists x\, \neg\varphi(x)$. Esto, para cualquier fórmula $\varphi(x)$.

3. $AP \vdash \neg\forall x\, \varphi(x)$, entonces hay un $n \in \mathbb{N}$, $AP \nvdash \varphi(x / \overline{n})$. Esto, para cualquier fórmula $\varphi(x)$.

b). AP es ω–Inconsistente syss hay una fórmula $\varphi(x)$ tal, que

para cada $n \in \mathbb{N}$, $AP \vdash \varphi(x / \overline{n})$ y $AP \vdash \exists x\, \neg\varphi(x)$

Proposición. Si AP es ω–consistente, entonces AP es consistente.
Prueba: Es inmediata por contrapositiva. †

Proposición$_{\aleph}$. (Parte **II**).

Si AP es ω–consistente, entonces $AP \nvdash \neg\beta(v_1 / \overline{g})$.

Prueba: La prueba es directa. Supongamos pues, que AP es ω–consistente. Así, AP es consistente y por la parte **I** tenemos que, $AP \nvdash \beta(v_1 / \overline{g})$. Con esto tenemos,

$$\neg PR(n, g, 1), \quad \text{para todo natural } n$$

Y puesto que α_{PR} expresa a la relación PR en AP, por $\mathbf{R_2}$, tenemos que,

$$\text{para cada natural } n, \qquad AP \vdash \neg\alpha_{PR}\left(v_0 / \overline{n}\ ,\ v_1 / \overline{g}\ ,\ v_2 / \overline{1}\right)$$

Ahora, si consideramos la fórmula $\varphi(v_0) \rightleftharpoons \neg\alpha_{PR}(v_0, v_1 / \overline{g}, v_2 / \overline{1})$ y aplicamos la ω–consistencia de AP, obtenemos: $AP \nvdash \neg\forall v_0\, \neg\alpha_{PR}(v_0, v_1 / \overline{g}, v_2 / \overline{1})$; es decir,

$$AP \nvdash \neg\beta(v_1 / \overline{g})$$ †

Podemos ahora enunciar el,

Primer Teorema de Incompletud de Gödel (1931).

I. Si AP es consistente, entonces $AP \nvdash \beta(v_1 / \overline{g})$.

II: Si AP es ω–Consistente, entonces $AP \nvdash \neg\beta(v_1 / \overline{g})$.

Por lo que, si AP es ω–Consistente, entonces AP tiene un indecidible, a saber $\beta(v_1 / \overline{g})$, y por tanto Incompleta —Sintácticamente.

†