

Teorema de Gödel-Rosser (Generalizado)

En 1936, Berkley Rosser modificó la construcción de Gödel y obtuvo un enunciado indecidible —para la Aritmética— en el cual solamente se exige la consistencia simple —y no la ω —consistencia— de AP . Veamos un tratamiento más general de su prueba.

En lo que sigue consideremos un tipo de semejanza ρ tal que:

$$\rho \supseteq \{f_s, f_+, f., c_0\} \quad \text{y} \quad |\rho| \leq \aleph_0$$

Observación: Si $|\rho| \leq \aleph_0$, entonces $|\mathcal{L}_\rho| = \aleph_0$ y podemos construir una

$$g_1 : \mathcal{L}_\rho \rightarrow \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$$

de tal suerte que dado un número impar sabemos perfectamente si está —o, no— en la imagen y en tal caso de quién proviene. Y por tanto tener toda la numeración de Gödel, a saber g_2 y g_3 .

Definición₁. Sea $T \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$. Diremos que T es *Recursivamente Axiomatizable* syss hay un $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$ tal, que $\Gamma^+ = T^+$ y $\{g_2(\sigma) \mid \sigma \in \Gamma\} = AxT$ es un conjunto (una Relación) Recursivo(a) (Primitivo(a)).

Observación: Si T es Recursivamente Axiomatizable, entonces son Relaciones Recursivas (Primitivas):

- 31. $PRU(n, m)$ y
- 34. $PR(n, m, k)$ (syss $PRU(n, diag(m, k))$).

Proposición. (Teorema de Gödel–Rosser)

Sea $T \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$ tal que:

- 1. T es Recursivamente Axiomatizable,
- 2. Toda Relación (Función) Recusiva es Expresable (Representable) en T .
- 3. i). Para toda ρ –fórmula con exactamente una variable libre, digamos $\varphi(x)$ y todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$T \vdash \varphi(x / \bar{0}) \ \& \ \dots \ \& \ \varphi(x / \bar{k}) \rightarrow \forall x (x \leq \bar{k} \rightarrow \varphi(x))$$

- ii). Para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$T \vdash \forall x (x \leq \bar{k} \vee \bar{k} \leq x)$$

Así, si T es Consistente, entonces T tiene un Indecidible y por tanto es Incompleta.

Lo primero que hay que observar es que nuestro sistema AP , cumple con lo requerido y lo segundo, es que la relación PR es expresable en cualquier T que cumpla con lo dispuesto y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que lo expresa la fórmula $\alpha_{PR}(v_0, v_1, v_2)$.

Prueba: Consideremos la siguiente relación:

35. $PRN \subseteq \mathbb{N}^3$.

$PRN(n, m, k)$ syss n es el número de gödel de una sucesión finita de fórmulas, la cual es una prueba, en T , de la **negación** de la diagonalización de la formula con número de secuencia m , en la variable v_k . Es recursiva,

$$PRN(n, m, k) \text{ syss } PRU(n, \text{neg}(\text{diag}(m, k)))$$

Por tanto, es expresable en el sistema T , digamos por la ρ -fórmula $\alpha_{PRN}(v_0, v_1, v_2)$. Ahora consideremos la siguiente ρ -fórmula con v_1 como única variable libre:

$$\gamma(v_1) \Leftrightarrow \forall v_0 \left[\alpha_{PR}(v_0, v_1, v_2 / \bar{1}) \rightarrow \neg \forall v_l \left(v_l \leq v_0 \rightarrow \neg \alpha_{PRN}(v_0 / v_l, v_1, v_2 / \bar{1}) \right) \right]$$

donde v_l es la primera variable que no ocurre ni en α_{PR} ni en α_{PRN} .

Ahora tomemos la digonalización de $\gamma(v_1)$ en v_1 . Sea r el número de secuencia de $\gamma(v_1)$, es decir, $r = g_2(\gamma(v_1))$ y obtenemos el enunciado:

$$\begin{aligned} \gamma(v_1 / \bar{r}) \Leftrightarrow \forall v_0 \left[\alpha_{PR}(v_0, v_1 / \bar{r}, v_2 / \bar{1}) \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \neg \forall v_l \left(v_l \leq v_0 \rightarrow \neg \alpha_{PRN}(v_0 / v_l, v_1 / \bar{r}, v_2 / \bar{1}) \right) \right] \end{aligned}$$

Llamado “El enunciado de Rosser”. (¿Qué dice?)

Las siguientes observaciones nos serán útiles más adelante: Para un $n \in \mathbb{N}$,

(\mathbf{O}_1) $PR(n, r, 1)$ syss n es el número de gödel de una prueba, en T , de $\gamma(v_1 / \bar{r})$.

(\mathbf{O}_2) $PRN(n, r, 1)$ syss n es el número de gödel de una prueba, en T , de $\neg \gamma(v_1 / \bar{r})$.

Af₁. Si T es consistente, entonces $T \not\vdash \gamma(v_1 / \bar{r})$.

Af₂. Si T es consistente, entonces $T \not\vdash \neg \gamma(v_1 / \bar{r})$.

Prueba de Af₁: TAREA.

Prueba de Af₂: (Por reducción a lo absurdo). Supongamos pues, que T es consistente y con la intención de llegar a una contradicción, además supongamos,

$$T \vdash \neg\gamma(v_1 / \bar{r}) \dots\dots\dots(*)$$

Así, hay un $k \in \mathbb{N}$, que corresponde a la prueba, en T , de $\neg\gamma(v_1 / \bar{r})$. De (**O**₂) tenemos que $PRN(k, r, 1)$ y por la expresabilidad de PRN en T , tenemos que:

$$T \vdash \alpha_{PRN}(v_0 / \bar{k}, v_1 / \bar{r}, v_2 / \bar{1}) \dots\dots\dots(**)$$

De esto podemos obtener,

$$T \vdash \bar{k} \leq v_0 \rightarrow \exists v_l (v_l \leq v_0 \ \& \ \alpha_{PRN}(v_0 / v_l, v_1 / \bar{r}, v_2 / \bar{1})) \dots\dots\dots(\star)$$

pues:

1. $\bar{k} \leq v_0$ Hip.
2. $\alpha_{PRN}(v_0 / \bar{k}, v_1 / \bar{r}, v_2 / \bar{1})$ (**)
3. $\bar{k} \leq v_0 \ \& \ \alpha_{PRN}(v_0 / \bar{k}, v_1 / \bar{r}, v_2 / \bar{1})$ de 1 y 2
4. $\exists v_l (v_l \leq v_0 \ \& \ \alpha_{PRN}(v_0 / v_l, v_1 / \bar{r}, v_2 / \bar{1}))$Regla \exists

Con esto tenemos: $T \cup \{\bar{k} \leq v_0\} \vdash \exists v_l (v_l \leq v_0 \ \& \ \alpha_{PRN}(v_0 / v_l, v_1 / \bar{r}, v_2 / \bar{1}))$. Y usando el metateorema de la deducción, obtenemos lo que queríamos.

Por otro lado, puesto que T es consistente y de (*), tenemos que:

$$T \not\vdash \gamma(v_1 / \bar{r})$$

Así, por (**O**₁), tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\neg PR(n, r, 1)$. De esto y la representabilidad de PR en T , tenemos que: para todo $n \in \mathbb{N}$, $T \vdash \neg\alpha_{PR}(v_0 / \bar{n}, v_1 / \bar{r}, v_2 / \bar{1})$. En particular para los primeros $k + 1$ naturales y por tanto:

$$T \vdash \neg\alpha_{PR}(v_0 / \bar{0}, v_1 / \bar{r}, v_2 / \bar{1}) \ \& \ \dots \ \& \ \neg\alpha_{PR}(v_0 / \bar{k}, v_1 / \bar{r}, v_2 / \bar{1})$$

Y puesto que T cumple con la propiedad **3.i**), usando Modus Ponens y después el Axioma de Particularización (**AL**₄), obtenemos:

$$T \vdash v_0 \leq \bar{k} \rightarrow \neg\alpha_{PR}(v_0, v_1 / \bar{r}, v_2 / \bar{1}) \dots\dots\dots(\star\star)$$

Ahora bien, T cumple con la propiedad **3.ii**) y si ésta la particularizamos, obtenemos:

$$T \vdash (v_0 \leq \bar{k}) \vee (\bar{k} \leq v_0)$$

De esto, (**★**) y (**★★**) obtenemos:

$$T \vdash \neg\alpha_{PR}(v_0, v_1 / \bar{r}, v_2 / \bar{1}) \vee \exists v_l (v_l \leq v_0 \ \& \ \alpha_{PRN}(v_0 / v_l, v_1 / \bar{r}, v_2 / \bar{1}))$$

Finalmente, usando generalización y algunas convenciones:

$$T \vdash \forall v_0 \left[\alpha_{PR} (v_0, v_1 / \bar{F}, v_2 / \bar{1}) \rightarrow \exists v_1 (v_1 \leq v_0 \ \& \ \alpha_{PRN} (v_0 / v_1, v_1 / \bar{F}, v_2 / \bar{1})) \right]$$

es decir, $T \vdash \gamma (v_1 / \bar{F})$, lo cual contradice la consistencia de T . †

Corolario. El Teorema de Gödel-Rosser es cierto para la Aritmética de Peano, AP .

Si AP es Consistente, entonces es Incompleta.

Corolario. Si T es una extensión recursiva de AP , entonces es válido el Teorema de Gödel-Rosser para T . Explícitamente:

Sea $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$ tal que,

i). $\Gamma^+ \supseteq AP$. Y

ii). $\{g_2(\sigma) \mid \sigma \in \Gamma\}$ es un conjunto Recursivo (Primitivo),

Así, si Γ es consistente, entonces Γ es incompleto.

Solo recordamos que hay una petición inicial al Lenguaje Formal; se considera un tipo de semejanza ρ tal que:

$$\rho \supseteq \{f_s, f_+, f., c_0\} \text{ y } |\mathcal{L}_\rho| = \aleph_0$$