Indecidibilidad de la Lógica de Primer Orden

Church mostró también[(∗)] que la lógica misma de primer orden es indecidible, en el sentido de que no hay ningún algoritmo que permita determinar si un enunciado es universalmente válido o no lo es.

Para ello basta hallar una teoría consistente y finitamente axiomatizable T, en el lenguaje de la aritmética, con por lo menos el contenido mínimo requerido.

La razón es simple: Si la lógica fuera decidible lo sería también $T^{\vdash}$, pues para determinar si σ es un teorema de T basta determinar si el condicional $(\alpha \rightarrow \sigma)$ es universalmente válido, donde α es la conjunción de los axiomas de T. (Ver los dos primeros artículos de la breve monografía $(\ast\,\ast)$ de Tarski, Mostowski y Robinson.)

$(\ast)$ CHURCH, Alonzo; *"A note on the Entscheidungsproblem".* The Journal of Symbolic Logic, 1: 40–41, 1936.

$(\ast\,\ast)$ TARSKI, Alfred, MOSTOWSKI, Andrzej y ROBINSON, Raphael; *"Undecidable Theories".* North-Holland, Amsterdam, 1953.