Teoría de Modelos.
La Revancha de la Semántica.

Fernando Javier Nuñez Rosales

22 de mayo de 2015

La única gente que me interesa es la que está loca, la gente que está loca por vivir, loca por hablar, loca por salvarse, con ganas de todo al mismo tiempo, la gente que nunca bosteza ni habla de lugares comunes, sino que arde, arde como fabulosos cohetes amarillos explotando igual que arañas entre las estrellas.

Jack Kerouac

Índice general

Introducción

Desde mi punto de vista la teoría de modelos es una de las áreas más hermosas de la matemática, con capacidades muy grandes, con las cuales se pueden atacar problemas de otras ramas, como lo son: geometría algebraica, álgebra y análisis. A pesar de esto la cantidad de textos en español es muy poca y a veces difícil de conseguir para el alumno interesado en el tema, por otro lado la literatura en ingles suele tener un alto grado de dificultad, por lo que, para el estudiante puede representar un gran reto ir de los textos de lógica matemática a los mencionados. Otro inconveniente en la literatura es el acuerdo de la definición de estructura, ya que algunos como Bell y Slomson solo contemplan estructuras relacionales, con el argumento que cualquier otra se puede llevar a estas, lo cual es cierto pero modifica el estudio de las relaciones entre ellas.

De lo anterior ha surgido la motivación de escribir este trabajo, lo cual no pretende que sea mejor o sea el punto de vista indicado, sino que, adecuado a planes y programas de estudio de la Facultad de Ciencias de la UNAM creeo que puede dotar de material suficiente al estudiante para cubrir este vacío de material intermedio entre los textos de lógica matemática y teoría de modelos. Como el objetivo de este texto es de carácter pedagógico, no emplearé la escritura en primera persona, iniciando desde el siguiente párrafo.

Este texto aglutina material que concuerda con la teoría de modelos clásica y moderna. Otro de los objetivos ha sido tratar de acercar al lector al teorema de categoricidad de Morley, para el cual solo hace falta estudiar O-minimalidad.

Para empezar la descripción de los contenidos de este documento, advertimos al lector que este trabajo va dirigido sobre todo a estudiantes que han cursado las materias de Lógica Matemática I y II de la licenciatura, donde se estudia la lógica de conectivos (lógica proposicional), y lógica de primer orden (teoría de la cuantificación), sus respectivos teoremas de compacidad, los enfoques semántico y sintáctico, y donde se da también una introducción a la teoría de modelos, la cual contempla: la semántica de los lenguajes de primer orden y las relaciones entre las interpretaciones entre otros tópicos. También es deseable que el lector haya tomado el curso de Lógica matemática III donde comúnmente se estudia el primer teorema de incompletud de Gödel, el cual consideramos como uno de los resultados más hermosos de la matemática por su carácter limitativo en la teoría de la demostración. También es preferible que se tengan conocimientos de la teoría de los conjuntos, ya que sin definición ni explicación emplearemos lenguaje de esta, como ω para referirnos al conjunto inductivo más pequeño, es decir, el conjunto de los naturales, así como los conceptos de equipotencia, cardinalidad, el manejo de números transfinitos y el **axioma de elección** entre otros.

Antes de iniciar con la descripción de cada capítulo es importante hacer una **observación** sobre algunos conceptos, la cual abarca todo el texto, que se van definiendo "a secas" pero que son completamente relativos, como lo son: la consistencia y la completud, por ejemplo, conceptos que deberían de ser definidos puntualmente dependiendo del tipo de semejanza en el que se esta trabajando (verbigracia>τ-completud). Esta observación es de suma importancia ya que en algunos capítulos se extiende el lenguaje para obtener algunos resultados y ahí puede ser que las teorías ya no tengan dicha propiedad, como se hace en el capítulo 6. Se ha hecho de esta manera por que esperamos que el lector estará pendiente de este detalle técnico.

Este trabajo está dividida en 6 capítulos:

En el primero, titulado Inicios, la primera sección es meramente un desfile de definiciones, algunos lemas y uno que otro teorema que se mencionan sin prueba, los cuales se plasman con la intención de establecer una base de conocimiento mínima, como punto de partida. En lo posterior de este capítulo tenemos resultados básicos sobre las consecuencias que se tienen en cuanto a satisfacibilidad, provenientes de ciertas relaciones básicas que se definen y estudian en ese lugar.

En el segundo capitulo se estudian técnicas básicas de la teoría modelos, a algunas de ellas el estudiante de lógica tiene un acercamiento pero en versiones numerables, aquí se extienden. Algunos de los resultados más importantes que se exhiben en este capitulo son, los teoremas de Lowenheim-Skolem, de Lowenheim-Skolem-Tarski, el test de Tarski-Vaught y algunos teoremas de preservación e invarianza. Además se introducen conceptos que se utilizan más adelante, como el de cadenas, extensiones elementales, encajes elementales, entre otros.

En el Capítulo III (teorías completas y modelo-completud), se estudian conceptos que nacen de concepciones muy básicas como la completud de una teoría y a partir de este nacen nuevos conceptos y una variedad de herramientas para verificar relaciones entre modelos de varias teorías, que además con base en ciertas relaciones que se tienen entre los modelos de algunas teorías, éstas derivan con propiedades sintácticas muy interesantes.

Por otra parte, en este apartado se presenta la eliminación de cuantificadores, la cual es una herramienta extremadamente poderosa en áreas como el álgebra. Creemos que este capítulo puede interesar ampliamente a los interesados en álgebra y más en específico, en la teoría de campos.

El cuarto capítulo esta dedicado fuertemente a las álgebras de Boole: primero se exhibe un panorama general de ellas y algunas pruebas de propiedades internas, luego extendemos el análisis para llegar a cuestiones sobre filtros y ultrafiltros. Con estas herramientas, analizaremos cuestiones sobre modelos de teorías, herramientas que serán de amplia utilidad en el capítulo posterior.

En el capítulo siguiente, de ultraproductos, se construye esta estructura y se discuten los requerimientos lógicos dentro de ella, es decir, se hace explícito porque debe ser el universo de estas estructuras, un conjunto de clases de equivalencia modulo el ultrafiltro, en lugar de solo dejar el producto directo. Se presentan algunos resultados básicos y se llega a la caracterización de lo que son las clases elementales. Hemos tocado someramente estos temas, a pesar de que son profundamente ricos y de gran utilidad, para no exceder los objetivos planteados, ni extender el texto en demasía.

En el ultimo apartado, titulado realización y omisión de tipos, se introducen los conceptos de tipos, tanto de estructuras como de teorías. A partir de lo anterior se analiza la creación de nuevos objetos en extensiones de estructuras y condiciones necesarias para asegurar que en las extensiones de una estructura no existan elemento con determinadas propiedades. Intuitivamente podemos pensar a los tipos como una fórmula abierta que describe propiedades mediante sus variables libres. Con base en este concepto, comienzan a surgir otros como el de modelo atómico. En este capitulo brindamos una caracterización de él y posteriormente establecemos, a través de las álgebras de Boole, condiciones necesarias y suficientes para la existencia del modelo.

Por ultimo, ofrecemos un apéndice donde hay una prueba del teorema de compacidad para la lógica de primer orden en lenguajes de cardinalidad arbitraria solo para enunciados, después una mejora de este, la cual consiste en una versión para fórmulas con variables libres.

Al lector que se pregunte ¿qué sigue?, le recomendamos que continúe sus estudios sobre los conceptos de saturación, estabilidad y homogeneidad, los cuales podrán llevarle a la construcción del **modelo monstruo** de Tarski ($\mathbb{M}$), de una teoría y por otro lado, iniciarse en la teoría de la clasificación[1]. Ya con esta herramienta a la mano, solo faltaría el tema de $\mathcal{O}$-minimalidad para poder estudiar el teorema de categoricidad de Morley.

Por ultimo, esperamos que este texto sea ameno y útil al lector.

[1]El lector interesado en el tema puede consultar el libro de Shelah, en el cual además los prerrequisitos inician en saturación.

Apéndice A

El calculo de predicados y la teoría de modelos.

En este capitulo se abordaran las técnicas básicas de la teoría de modelos que nacen a partir del calculo de predicados, el cual se introduce para encontrar un aspecto formal para llegar a las fórmulas universalmente validas, no solo seo, si no que tendra repercusiones en la semantica mucho mas fuertes que son de amplio interes para este texto como el siguiente resultado que demostraremos mas adelante: Si un conjunto de enunciados es sintácticamente consistente entonces tiene modelo.

A.1. El calculo formal

Una de las nociones mas importantes para la lógica matemática es el estudio de la teoría de la demostración, en este trabajo no lo desarrollaremos ampliamente, pues nos interesa la semántica, y justo ese aspecto sera el que iremos desarrollando conforme avancemos en los resultados.

A continuación presentaremos los axiomas y reglas de inferencias de un calculo lógico y formal que resultara semanticamente suficiente.

Definición A.1. *Un sistema formal es una terna ordenada $\langle A, R, E \rangle$, donde E es un lenguaje, A es un conjunto de expresiones de dicho lenguaje y R reglas de inferencia.*

En este ámbito definamos el CP como un sistema formal.

Definición A.2. *Dado un tipo de semejanza τ y su lenguaje $\mathscr{L}_\tau$ definimos el sistema formal del calculo de predicados como $\langle \Lambda, \{MP, Gen\}, \mathscr{L}_\tau \rangle$, donde*

$$\Lambda = \bigcup_{k=1}^{5} Ax_k$$

y cada Ax_k es un conjunto de axiomas, o esquema axiomático, como sigue: Dados $\varphi, \psi, \gamma \in \mathscr{L}_\tau$ y $t \in TERM_\tau$:

- $Ax_1 \rightleftharpoons \varphi \to (\psi \to \varphi)$

- $Ax_2 \rightleftharpoons (\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \gamma))$
- $Ax_3 \rightleftharpoons (\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$
- $Ax_4 \rightleftharpoons \forall x\varphi \to \varphi^x_t$ *Si t es libre para x en φ*
- $Ax_5 \rightleftharpoons \forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi)$

Sera calculo de predicados con igualdad si se agregan a Λ el siguiente axioma y esquema axiomático:

- $Ax_6 \rightleftharpoons \forall x_0(x_0 = x_0)$
- $Ax_7 \rightleftharpoons \forall x\forall y\big[x \approx y \to (\varphi[x,x] \to \varphi[x,y])\big]$

En cuanto a las reglas de inferencia, MP y Gen se tiene lo siguiente:

$$\frac{\psi, \psi \to \varphi}{\varphi} \quad MP$$

$$\frac{\varphi(x)}{\forall x\varphi(x)} \quad Gen$$

Definición A.3. *Una demostración (en el sistema CP), es una lista finita de formulas $\varphi_0, ..., \varphi_n \in \mathscr{L}_\tau$, tal que para toda $1 \leqslant i \leqslant n$ se tiene lo siguiente:*

- *$\varphi_i \in \Lambda$ o;*
- *φ_i se obtiene de anteriores por MP o;*
- *φ_i se obtiene de anteriores por Gen o;*

Decimos que φ se demuestra en el CP syss hay una prueba en el sistema tal que $\varphi_n = \varphi$, y lo denotamos por $\vdash \varphi$.

Este sistema formal jugara el papel de aparato lógico, retratando de manera formal lo que pasa en la matemática, mas adelante probaremos que todas las formulas que se prueban en el sistema son formulas universalmente validas, pues un resultado intermedio a este nos interesa ampliamente, el cual ya hemos mencionado, sobre la equivalencia de tener modelo y ser un conjunto consistente.

Definición A.4. *Sea $\Gamma \subseteq \mathscr{L}_\tau$. Decimos que φ se deduce de Γ (en el CP), en símbolos $\Gamma \vdash \varphi$ syss hay una lista finita de fórmulas $\varphi_1, ..., \varphi_n$ tal que $\varphi_n = \varphi$ y para toda $i \in \{1, .., n\}$ se tiene lo siguiente:*

- *$\varphi_i \in \Lambda$ o;*
- *$\varphi_i \in \Gamma$ o;*
- *φ_i se obtiene de anteriores por MP o;*
- *φ_i se obtiene por Gen de anteriores sobre una variable, digamos x y $x \notin VL\big[\Gamma\big]$.*

Debemos considerar fuertemente que a Γ no se le esta pidiendo nada en especifico, este jugara el papel de "axiomas" en una determinada rama de la matemática, los cuales no tienen por que ser lógicamente validos, pero si serán verdad donde lo necesitemos, por ejemplo Γ pueden ser los axiomas de campo, o de anillos, escritos en primer orden.

Así hemos formalizado la noción de prueba como un objeto matemático, por lo que podemos hablar de consistencia y completud.

Definición A.5. *Consistencía Sea $\Gamma \subseteq \mathscr{L}_\tau$. Decimos que Γ es sintacticamente consistente syss no hay $\varphi \in \mathscr{L}_\tau^0$ tal que $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \neg\varphi$*

Definición A.6. *Completud Sea $\Gamma \subseteq \mathscr{L}_\tau$. Decimos que Γ es sintacticamente completo syss para cualquier $\varphi \in \mathscr{L}_\tau$ tenemos que $\Gamma \vdash \varphi$ o $\Gamma \vdash \neg\varphi$*

Ahora presentaremos tres lemas los cuales no probaremos ya que son de un curso de teoría de la demostración

Lema A.7. *Sean $\Gamma \cup \{\psi\} \subseteq \mathscr{L}_\tau$. Si $\Gamma \nvdash \psi$ entonces $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ es consistente.*

Lema A.8. *Sean $\Gamma \cup \{\psi\} \subseteq \mathscr{L}_\tau$, $\varphi(x) \in \mathscr{L}_\tau^1$ y c una constante que no figura ni en Γ ni en $\varphi(x)$. Si $\Gamma \vdash \exists x\varphi(x)$ y $\Gamma \cup \{\varphi(c)\} \vdash \psi$ entonces $\Gamma \vdash \psi$*

Lema A.9. *Generalización sobre constantes.Sean $\Gamma \subseteq \mathscr{L}_\tau$, $\varphi(x) \in \mathscr{L}_\tau^1$ y c una constante que no figura ni en Γ ni en $\varphi(x)$. Si $\Gamma \vdash \varphi(c)$ y entonces $\Gamma \vdash \forall x\varphi(x)$*

Teorema A.10 (Compacidad sintáctica o de finitud)**.** *Sean $\Gamma \subseteq \mathscr{L}_\tau^0$ y $\varphi \in \mathscr{L}_\tau^0$. $\Gamma \vdash \varphi$ syss hay $\Gamma_0 \in [\Gamma]^{<\omega}$ tal que $\Gamma_0 \vdash \varphi$*

A.2. Caracterización Semántica de la Consistencia

Ahora si estamos en condiciones de probar el teorema que estamos buscando para unir la sintaxis con la semántica y no solo eso, con el teorema de completud correctud de Gödel nos ayudara a probar el famoso teorema de compacidad.

Teorema A.11. *Sea $\Sigma \subseteq \mathscr{L}_\tau^0$. Σ es sintacticamente consistente syss hay $\mathfrak{A} \in V_\tau$ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$*

Prueba: Si el lenguaje es numerable no necesitamos emplear el axioma de elección ya que con la técnica de Gödelización podemos dar la regla explicita para numerar las fórmulas del lenguaje.

Si el lenguaje no es numerable usando el AE podemos encontrar una biyección entre las fórmulas lenguaje y algún cardinal, supongamos κ, si $\alpha < \kappa$, llamaremos φ_α a la fórmula que este en correspondencia con dicho ordinal. Sea $C = \{c_\zeta^0 : \zeta < \kappa\}$ un conjunto de contantes que no aparecen en τ Así por recursión para κ definimos la siguiente función:

$$\Phi(0) = \Sigma_0 = \Sigma$$

$$\Phi(\alpha^+) = \begin{cases} \Sigma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} & \textit{Si } \Sigma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \textit{ es consistente} \\ \\ \Sigma_\alpha \cup \{\neg\varphi_\alpha\} & \textit{Si } \Sigma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \textit{ es inconsistente} \\ & \textit{y } \varphi_\alpha \textit{ no es de la forma } \forall x\beta(x) \textit{ p. a. } \beta \\ \\ \Sigma_\alpha \cup \{\neg\varphi_\alpha, \neg\beta(c^0_\zeta)\} & \textit{Si } \Sigma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \textit{ es inconsistente} \\ & \textit{y } \varphi_\alpha \textit{ es de la forma } \forall x\beta(x) \textit{ p. a. } \beta \end{cases}$$

$$\Phi(\gamma)_{\gamma\in LIM} = \bigcup_{\xi<\gamma} \Sigma_\xi$$

Donde c^0_ζ es la primer constante de C que no figura en las formulas de los conjuntos indicados en los pasos recursivos.

Sea

$$\Delta = \bigcup_{\xi<\kappa} \Sigma_\xi$$

Claramente hemos cambiado de tipo de semejanza al agregar las nuevas constantes, llamemos al nuevo τ' afirmamos que Δ cumple con las siguientes propiedades:

1. $\Sigma \subset \Delta$
2. $\in$-completud en $\mathscr{L}_{\tau'}$ (para toda $\varphi \in \mathscr{L}_{\tau'}$ se tiene que $\varphi \in \Delta$ o $\neg\varphi \in \Delta$)
3. $\mathscr{L}_{\tau'}$-Consistencia y $\subset$-maximal en $\wp(\mathscr{L}_{\tau'})$
4. τ' universalidad (Si $\forall x\varsigma(x) \in \Delta$ entonces para toda $c \in C$ tenemos que $\varsigma(c) \in \Delta$)

La primera y segunda afirmación es trivial ya que así hemos construido Δ. Por abundar mas en el segundo punto, como todas las formulas están en correspondencía con un ordinal, hemos verificado todos los casos agregando la formula necesaria.

Para el tercer punto la prueba necesitamos ver que cada paso de la construcción preserva la $\mathscr{L}_{\tau'}$-consistencia, los cual verificaremos por por inducción sobre κ, sea $\gamma < \kappa$, si $\gamma = 0$ se cumple por hipótesis, Σ se supone consistente.

Supongamos que hay $\alpha \in OR$ tal que $\gamma = \alpha^+$ y supongamos que Σ_α es consistente y veamos que Σ_γ también lo es, por la construcción de la funciónón Φ tenemos dos casos fáciles gracias a los lemas mencionados anteriormente, supongamos que si Σ_γ fue construido con la tercer regla para ordinales sucesores es inconsistente, por lo tanto hay $\psi \in \mathscr{L}_{\tau'}$ tal que $\Sigma \cup \{\neg\varphi_\gamma, \neg\beta(c^0_\xi)\} \vdash \psi$ y $\Sigma \cup \{\neg\varphi_\gamma, \neg\beta(c^0_\xi)\} \vdash \neg\psi$, así usando el teorema de la deducción tenemos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi_\gamma\} \vdash \neg\beta(c^0_\xi) \to \psi$ y $\Sigma \cup \{\neg\varphi_\gamma\} \vdash \neg\beta(c^0_\xi) \to \neg\psi$ con lo que usando el axioma 3 del cálculo de predicados tenemos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi_\gamma\} \vdash \beta(c^0_\xi)$ por la elección de la constante y por el lema de generalización sobre constantes, tenemos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi_\gamma\}$ es sintácticamente inconsistente, lo cual contradice el que se haya construido el nuevo conjunto con la tercera opción.

Si $\gamma \in LIM$ Supongamos que Σ_γ es sintácticamente inconsistente, entonces hay una fórmula ψ tal que $\Sigma_\gamma \vdash \psi$ y $\Sigma_\gamma \vdash \neg\psi$ por el teorema de finitud tenemos que hay $\gamma_0, \gamma_1 < \gamma$ tal que $\Sigma_{\gamma_0} \vdash \psi$ y $\Sigma_{\gamma_1} \vdash \neg\psi$ por construcción tenemos que $\Sigma_{\gamma_0} \subseteq \Sigma_{\gamma_1}$ o $\Sigma_{\gamma_1} \subseteq \Sigma_{\gamma_0}$, sin perdida de generalidad supongamos el primer caso, por lo tanto $\Sigma_{\gamma_1} \vdash \psi \ \& \ \neg\psi$, llegando así a que hay $\xi < \gamma$ tal que Σ_ξ es sintácticante inconsistente, con lo que concluimos que cada estrato es consistente, mas aun para ver que Δ es consistente deberíamos de calcar la prueba para ordinales limite, quedando así demostrado la primer parte del tercer inciso.

Para la segunda parte del tercer inciso, supongamos que hay $\Gamma \subseteq \mathscr{L}_{\tau'}$ tal que $\Delta \subset \Gamma$,por lo tanto hay $\psi \in \Gamma \backslash \Delta$ Como teníamos una lista de todas las fórmulas hay $\xi < \kappa$ tal que $\psi = \varphi_\xi$, así tenemos que $\neg\varphi_\xi \in \Delta \subseteq \Gamma$ por lo tanto $\neg\varphi_\xi, \varphi_\xi \in \Gamma$ así Γ es sintácticamente inconsistente, lo cual conlleva a una contradicción, por lo tanto tenemos lo que queríamos probar.

Veamos que Δ es τ'-universaral. Supongamos que $\forall x \varsigma(x) \in \Delta$ y que hay $c \in C$ tal que $\varsigma(c) \notin \Delta$, como Δ es $\in$-completo en $\mathscr{L}_{\tau'}$ tenemos que $\neg\varsigma(c) \in \Delta$ de lo cual obtenemos la incosistencia de Δ, ya que $\Delta \vdash \big(\exists y \neg\varsigma(y)\big) \ \& \ \big(\forall x \varsigma(x)\big)$.

Este delta sera el procurador de la verdad, pues lo usaremos para definir la verdad en una estructura, que presentamos a continuación: Tomemos como universo $A = TRM^0_{\tau'}/\sim$ (los términos cerrados del lenguaje con tipo de semejanza τ' modulo la relación de equivalencia $\sim$), claramente $A \neq \varnothing$ y definamos la relación: Dados $t_0, t_1 \in TRM^0_{\tau'}$ decimos que $t_0 \sim t_1$ syss la fórmula $t_0 = t_1 \in \Delta$, es directo que para cada clase de equivalencia, hay un constante de τ' que se encuentra en ella, pues construimos Δ cerrado bajo testigos.

Definimos la interpretación $\mathfrak{A}$ de cada símbolo de τ'.

- Para cada símbolo funcional f de aridad n y cada $[t_1]_\sim, \ldots, [t_n]_\sim \in A$, $f^{\mathfrak{A}}([t_1]_\sim, \ldots [t_n]_\sim) = [f(t_1, \ldots, t_n)]_\sim$;

- Para cada símbolo relacional R de aridad m y cada $[t_1]_\sim, \ldots, [t_n]_\sim \in A$, $([t_1]_\sim, \ldots, [t_n]_\sim) \in R^{\mathfrak{A}}$ syss $R(t_1, \ldots, t_m) \in \Delta$ y

- Para cada símbolo c de constante $c^{\mathfrak{A}} = [c]_\sim$.

Queda como ejercicio al lector probar que las funciones están bien definidas, es decir que si $t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_n \in TRM^0_{\tau'}$ son tales que $t_i \sim t'_i$ para cada $1 \leqslant i \leqslant n$ entonces $f^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n) \sim f^{\mathfrak{A}}(t'_1, \ldots, t'_n)$. También se le deja que lo respectivo ocurre en el caso de las relaciones.

Por otra parte dado $t \in TRM^0_{\tau'}$ de la definición de la interpretación tenemos que $t^{\mathfrak{A}} = [t]_\sim$. (La prueba de este hecho se realiza por inducción sobre la construcción de términos.)

Afirmamos que para cada $\alpha \in \mathscr{L}^0_{\tau'}$, $\mathfrak{A} \models \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \Delta$, la prueba la realizaremos por complejidad sobre la construcción de fórmulas.

- Si φ es atómica por definición de las relaciones y por la relación de equivalencia ya terminamos.

- Sea $\varphi \rightleftharpoons (\alpha \ \& \ \beta)$. Supongamos $\mathfrak{A} \models \alpha$ syss $\alpha \in \Delta$ y que $\mathfrak{A} \models \beta$ syss $\beta \in \Delta$, así tenemos que $(\alpha \ \& \ \beta) \in \Delta$ syss $\alpha \in \Delta$ y $\beta \in \Delta$ syss (por hipótesis inductiva), $\mathfrak{A} \models \alpha$ y $\mathfrak{A} \models \beta$ syss (por Tarski) $\mathfrak{A} \models (\alpha \ \& \ \beta)$.

- Si $\varphi \leftrightharpoons \neg\alpha$, así $\mathfrak{A} \models \neg\alpha$ syss no es el caso que $\mathfrak{A} \models \alpha$ syss $\alpha \notin \Delta$ syss (por la $\in$-completud de Δ), $\neg\alpha \in \Delta$.
- Si $\varphi \leftrightharpoons \forall x\alpha(x)$. Así $\mathfrak{A} \models \forall x\alpha(x)$ syss para todo $a \in A$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \alpha(a)$ syss (por que en cada clase de equivalencia hay una constante de τ' y viceversa), $\alpha(c) \in \Delta$ para cada $c \in \tau'$ syss (por la τ'-universalidad de Δ), $\forall x\alpha(x) \in \Delta$.

De lo anterior $\mathfrak{A} \models \Delta$ como $\Sigma \subseteq \Delta$ entonces $\mathfrak{A} \models \Sigma$ ahora si tomamos $\mathfrak{B}$ el τ-reducto de $\mathfrak{A}$ tenemos que $\mathfrak{B} \in V_\tau$ y $\mathfrak{B} \models \Sigma$

†

Con lo anterior tenemos el modelo deseado, ahora estrenemos esta poderosa herramienta que ya ha creado un puente entre la semántica y sintaxis.

Teorema A.12. *Sean $\Sigma \subseteq \mathscr{L}_\tau^0$ y $\alpha \in \mathscr{L}_\tau^0$. Si $\Sigma \models \alpha$ entonces $\Sigma \vdash \alpha$.*

Prueba: Supongamos que $\Sigma \nvdash \alpha$, así tenemos que $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ es consistente, por el teorema anterior, tiene un modelos, digamos $\mathfrak{A}$, así $\mathfrak{A} \models \Sigma$ y $\mathfrak{A} \models \neg\alpha$ de lo cual obtenemos que $\Sigma \not\models \alpha$.

†

El resultado anterior es mejor conocido como el teorema de completud correctud extendida de Gödel para la lógica de primer orden. Aun que falta una implicación, la cual es trivial y se realiza por inducción por la longitud de la deducción.

A.3. El Teorema de Compacidad Semántico

Este teorema es de severa importancia en la teoría de modelos ya que nos brindara un método para saber cuando es satisfacible un conjunto de fórmulas, con lo probado en el capitulo anterior sera sumamente sencillo después de probar el siguiente resultado.

Teorema A.13. *Sean $\Sigma \subset \mathscr{L}_\tau^0$ y $\varphi \in \mathscr{L}_\tau^0$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $\Sigma \models \varphi$ *syss hay* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ *finito, tal que* $\Sigma_0 \models \varphi$

b) Σ *es satisfacible syss para todo* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ *finito,* Σ_0 *es satisfacible.*

Prueba (b $\Rightarrow$ a): Supongamos que $\Sigma \models \varphi$ syss $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es insatisfacible, por la equivalencia en cuanto a negaciones de b [1], esto es equivalente a que haya $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finito tal que $\Sigma_0 \cup \{\neg\varphi\}$ es insatisfacible, syss $\Sigma_0 \models \varphi$

a $\Rightarrow$ b: Una implicación de la equivalencia en b es obvia, veamos la prueba de la necesidad, de esta, es decir, veamos que si Σ es insatisfacible entonces hay $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finito tal que Σ_0 es insatisfacible. Sea Σ insatisfacible, por lo cual $\Sigma \models (\forall x(x \approx x) \wedge \neg\forall x(x \approx x))$, por el inciso a hay $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finito tal que $\Sigma_0 \models (\forall x(x \approx x) \wedge \neg\forall x(x \approx x))$, pero Σ_0 no tiene modelos, ya

[1] Σ es insatisfacible syss hay $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finito, tal que Σ_0 es insatisfacible.

que de lo contrario $\forall x(x \approx x) \wedge \neg\forall x(x \approx x)$ tendria modelo, lo cual seria una contradicción. Así que la afirmación es cierta.

Ahora podemos proceder a dar la prueba desde los resultados de la sección anterior del teorema de compacidad, a pesar de que la forma mas usada en la teoría de modelos es la enunciada en b, probaremos *a*.

Teorema A.14. *Sea $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathscr{L}^0_\tau$. $\Sigma \models \varphi$ syss hay $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finito, tal que $\Sigma_0 \models \varphi$*

Prueba: $\Sigma \models \varphi$,

syss por el teorema de completud-correctud extendido), $\Sigma \vdash \varphi$,

syss (por el teorema de compacidad sintáctica)hay $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finito tal que $\Sigma_0 \vdash \varphi$,

syss (por el teorema de completud-correctud extendido), hay $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finito tal que $\Sigma_0 \models \varphi$.

Con lo cual se prueba la equivalencia deseada, debemos notar la importancia del teorema de completud-correctud extendida.

†

Nuestro teorema lo enunciamos para fórmulas del lenguaje que no tuvieran variables libres, ciertamente se puede extender para cualesquiera conjunto de fórmulas probemos ahora este hecho, por lo cual debemos encontrar una asignación para la variables libres del lenguaje, tomaremos un paquete de constantes que no aparezcan en el tipo de lenguaje y con ellas construiremos la asignación, ya que dado la estructura modelo de los enunciados que resulten de sustituir las variables libres por dichas constantes tendremos $\langle c_n^{\mathfrak{A}} : n \in \mathbb{N}\rangle$ y propondremos $s : \mathbb{N} \longrightarrow A$ con la regla de correspondencia $s(i) = c_i^{\mathfrak{A}}$ como asignación.

Lema A.15. *Sean $\Sigma \subset \mathscr{L}_\tau$, $C = \{c_i : i \in \mathbb{N}\}$ un conjunto de constantes que no ocurran en τ y Γ en conjunto que resulta de sustituir en cada formula de Σ las variables libres por las constantes de C respetando el indice, es decir, cada x_i por c_i, entonces Γ es finitamente satisfacible syss Σ es finitamente satisfacible.*

Prueba (Necesidad): Sea $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito, veamos que tiene modelo, tomemos $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finito el correspondiente a Γ_0, por hipotesis hay $\mathfrak{A}' \in V_\tau$ y $s' : \mathbb{N} \longrightarrow A'$ tal que $\mathfrak{A}' \models \Sigma_0[s']$, llamemos τ' el tipo del lenguaje que resulta de agregar las constantes de C a τ, tomemos a $\mathfrak{A} \in V_{\tau'}$, para lo cual falta decir como interpretar las constantes nuevas, hagamos $c_i^{\mathfrak{A}} = s'(i)$ así por construcción tenemos que $\mathfrak{A} \models \Gamma_0$.

(Suficiencia:) Sea $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finito y $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito el correspondiente por la sustitución de las variables por las constantes, sean $\mathfrak{A} \in Mod(\Gamma_0)$ y $\mathfrak{A}'$ el reducto que resulta de retirar de $\mathfrak{A}$ los elementos distinguidos que son interpretación de las constantes de C que ocurren en las fórmulas de Γ_0 y sea $s \in {}^{\mathbb{N}}A'$ tal que $s(j) = c_j^{\mathfrak{A}}$, afirmamos que $\mathfrak{A}' \models \Sigma_0[s]$, sea $\varphi[x_1, \ldots, x_m] \in \Sigma_0$, done los corchetes cuadrados indican que las variables pueden o no aparecer en la fórmula, pero por la definición de esta es finita, así hay a lo mas un numero finito de variables libres que ocurren en ella, por lo tanto $\mathfrak{A} \models \varphi[c_1, \ldots, c_m]$ con lo cual $\mathfrak{A}' \models \varphi[s(x_1)), \ldots, s(x_m)]$ así $\mathfrak{A}' \models \varphi[s]$. Así hemos terminado la prueba.

†

Como siempre pasa en la matemática, despues de este lema probaremos el gran teorema.

Teorema A.16. *Sea $\Sigma \subset \mathscr{L}_\tau$. Si para cada $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ hay $\mathfrak{B} \in V_\tau$ y $s \in {}^{\mathbb{N}}B$ tal que $\mathfrak{B} \models \Sigma_0[s]$ entonces hay $\mathfrak{A} \in V_\tau$ y $s_1 \in {}^{\mathbb{N}}A$ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma[s_1]$.*

Prueba: Sea Γ el conjunto que se describe en el lema anterior, al ser Σ finitamente satisfacible, Γ lo es, por la versión semántica del teorema de compacidad Γ tiene modelo, a saber $\mathfrak{C} \in V_{\tau'}$, donde τ' es el tipo que resulta de agregar las constantes de C a τ, y sean $\mathfrak{A}$ el reducto de $\mathfrak{C}$ al lenguaje τ y $s_1 \in {}^{\mathbb{N}}A$ una asignación tal que $s_1(i) = c_i^{\mathfrak{C}}$.

Afirmamos que $\mathfrak{A} \models \Sigma[s_1]$, tomemos $\alpha[x_1, \ldots, x_m] \in \Sigma$ así $\alpha[c_1, \ldots, c_m] \in \Gamma$, por lo que $\mathfrak{C} \models \alpha[c_1, \ldots, c_m]$, por lo tanto $\mathfrak{A} \models \alpha[s_1(x_1), \ldots, s_1(x_m)]$ por lo que $\mathfrak{A} \models \alpha[s_1]$, con lo que concluimos la prueba.

†

Ahora tenemos un teorema de compacidad más fuerte ya que funciona para conjuntos de fórmulas y no solo para enunciados.

Un dato importante es que por la forma en la que construimos el modelo para el conjunto de enunciados consistente, el modelos que nos brinda compacidad tiene la cardinalidad del lenguaje, más aun cuando mejoramos el resultado solo agregamos una cantidad numerable de constantes por lo que incluso en esa prueba se mantiene la observacion para la cardinalidad del lenguaje, lo cual se explota ampliamente en el texto.

Con compacidad es posible obtener versiones básicas de los teoremas de Löwenheim-Skolem-Tarski.

Teorema A.17 (LS para conjuntos de fórmulas.). *Sea $\Gamma \subseteq \mathscr{L}_\tau^0$. Si hay $\mathfrak{A} \in Mod(\Gamma) \cap INF$, entonces para cada $\lambda \in CAR$, si $\mid \mathscr{L}_\tau \mid \leqslant \lambda \leqslant \mid A \mid$ entonces hay $\mathfrak{C} \in V_\tau$ tal que $\mathfrak{C} \models \Gamma$ y $\mid C \mid = \lambda$.*

Prueba: Supongamos que $\mathfrak{A}_0 \models \Gamma$ y que $\mid A_0 \mid \geqslant \aleph_0$, tomemos un cardinal λ, tal que $\mid \mathscr{L}_\tau \mid \leqslant \lambda \leqslant \mid A_0 \mid$.

Sea $Z = \{z_\xi : \xi < \lambda\}$ un conjunto de constantes que no ocurren en τ, sea $\Phi = \{\neg(c_\xi \approx c_\zeta) : c_\xi, c_\zeta \in Z \ y\ \xi, \zeta < \lambda\}$.

Veamos que $\Gamma \cup \Phi$ tiene un modelo, para lo cual, empleando el teorema de compacidad, es suficiente verificar que cada subconjunto finito lo tiene. Sea $\Sigma_0 \subset \Gamma \cup \Phi$ finito entonces hay $\Phi_0 \subset \Phi$ y $\Gamma_0 \subset \Gamma$ finitos tal que $\Sigma_0 = \Gamma_0 \cup \Phi_0$, por lo tanto hay $Z_0 \subset Z$ finito, tal que las constates de Z_0 son las que constantes que ocurren en las fórmulas de Φ_0 , construyamos una interpretación, a saber $\mathfrak{A}$, de la cual $\mathfrak{A}_0$ sea reducto, solo faltaría decir como interpretar las constantes de Z_0, como A_0 es infinito entonces hay $B \subset A_0$ tal que $B \sim Z_0$ y en B no hay elementos distinguidos de $\mathfrak{A}_0$, ahora si $z \in Z_0$, definimos $z^{\mathfrak{A}} = b \in B$ donde b es el elemento que esta en correspondencia univoca con z, afirmamos que $\mathfrak{A} \models \Phi_0$, claramente $\mathfrak{A} \models \Gamma_0$ pues es una expansión de tipo de $\mathfrak{A}_0$, como $B \sim Z_0$, tenemos que si $\neg(c_\xi \approx c_\zeta) \in \Phi_0$ entonces $\mathfrak{A} \models \neg(c_\xi \approx c_\zeta)$, por lo tanto $\mathfrak{A} \models \Sigma_0$.

Así tenemos que $\Phi \cup \Gamma$ tiene un modelo, llamemosle $\mathfrak{C}'$, por las observaciones antes hechas, tenemos que $\mid C' \mid = \lambda$, ya que $\mid \mathscr{L}_\tau \mid + \mid Z \mid = \lambda$, pero $\mathfrak{C}' \notin V_\tau$, entonces tomemos $\mathfrak{C}$ el reducto de $\mathfrak{C}'$ al lenguaje τ, sabemos que esta operación no modifica el tamaño de la estructura y al ser $\Gamma \subseteq \mathscr{L}_\tau^0$ seguimos teniendo que $\mathfrak{C} \models \Gamma$. Con lo que terminamos la prueba del teorema.

†

Teorema A.18 (LST para conjuntos de fórmulas.)**.** *Sea $\Sigma \subseteq \mathscr{L}_\tau^0$. Si Σ tiene un modelo infinito, $\mathfrak{A}$, entonces para todo $\kappa \in CAR$ si $\kappa \geqslant\mid \mathscr{L}_\tau \mid + \mid A \mid$ entonces hay $\mathfrak{B} \in V_\tau$ tal que $\mathfrak{B} \models \Sigma$ y $B \sim \kappa$.*

Prueba: Esta sera análoga a la del teorema A.17 , pues tomamos $Z = \{c_\xi : \xi < \kappa\}$ un conjunto de constantes que no ocurren en τ, así todo el argumento es completamente análogo, por lo que damos como probado este resultado.

†

En lenguaje natural los teoremas nos dicen que si un conjunto de enunciados tiene un modelos infinito entonces para cual quier cardinal entre el lenguaje y el tamaño del modelo infinito, hay una estructura para cada cardinal intermedio, por el teorema**?? ??** , justo el cardinal selecto puede ser el universo de la estrcutura.

A.4. Ejercicios

1. Termine las pruebas que se indican a lo largo del apéndice.

2. Sea T una τ-teoría en un lenguaje numerable. Pruebe que si T tiene modelos finitos arbitrariamente grandes entonces T tiene un modelo infinito.

3. Prueba que hay un modelo de la aritmética elementalmente equivalente a η pero no isomorfo.

4. Prueba que hay un modelo de los reales como campo ordenado donde no vale la propiedad arquimediana.

Bibliografía

[BS06] J. L. Bell and A. B. Slomson. *Models and Ultraproducts*. Dover Publications, 2006.

[Cas99] Enrique Casanovas. Teoría de modelos, 1999.

[CK91] C. C. Chang and H. J. Keisler. *Model Theory*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland, 1991.

[End04] Herbert Enderton. *Una introducción matemática a la lógica*. Filosofia Contemporanea. UNAM, 2004.

[Hod93] Wilfrid Hodges. *Model Theory*. Number 42 in Encyclopedia of Mathematics an its Applications. Cambridge University Press, 1993.

[JAN89] Ignacio JANÉ. *Álgebras de Boole y Lógica*. Number 5 in Materials Docents. Universitata de Barcelona, 1989.

[KB82] H. J. Keisler and J Barwise. *Handbook of Mathematical Logic*, volume Part A of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland, 1982.

[Mar02] David Marker. *Model Theory: An Introduction*. Number 217 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2002.

[Men97] Elliot Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman & Hall, 1997.

[Poi00] Bruno Poizat. *A Course in Model Theory: An Introduction to Contemporary Mathematical Logic*. Universitext. Springer, 2000.

[ST95] Julio Solís and Yolanda Torres. *Lógica Matemática*. UAM, 1995.

[TZ12] Katrin Tent and Martin Ziegler. *A Course in Model Theory*. Lecture Notes in Logic. Cambridge University Press, 2012.

[VMRRMP00] Luis Villegas Maldonado, Diego Rojas Rebolledo, and Favio Ezequiel Miranda Perea. *Conjuntos y modelos: Curzo Avanzado*. UAM, 2000.