Lógica Matemática II

Tarea-Examen I

4 de marzo de 2015

1. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$, $\alpha \in \mathscr{L}^1_\rho$.

   a) Pruebe que si para toda asignación $s : VAR \longrightarrow A$, $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$, entonces $\mathfrak{A} \models \forall x\alpha$.

   b) Pruebe que si para alguna asignación $s : VAR \longrightarrow A$, $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$, entonces $\mathfrak{A} \models \exists x\alpha$.

2. Consederemos $\rho = \{R\}$ con R un símbolo relacional de aridad 2, $\eta_< = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ una ρ-interpretación y el soguiente conjunto de ρ-enunciados:

   a) $ZF_1 \leftrightharpoons \forall x \forall y \big[\forall w(R(w,x) \leftrightarrow R(w,y)) \to x \approx y\big]$

   b) $ZF_2 \leftrightharpoons \exists x \forall w(\neg R(w,x))$

   c) $ZF_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y \exists z \forall w \big[R(w,z) \leftrightarrow (w \approx x \lor w \approx y)\big]$

   d) $ZF_4 \leftrightharpoons \forall x \exists z \forall w \big[R(w,z) \leftrightarrow \exists y(R(w,y) \;\;\&\;\; R(y,x))\big]$

   Determine si para cada $i \in \{1,2,3,4\}$ se tiene, o no, que

   $$\eta_< \models ZF_i$$

   Hagan el uso de la definición de satisfacción de Tarski EXPLICITO.

3. Di si las siguientes fórmulas son o no universalmente validas, si lo son da una prueba de ello, si no, una estructura y una asignación donde no se cumpla (un contraejemplo).

   a) Sea $\varphi(x) \in \mathscr{L}^1_\rho$ y $(\varphi(x))^x_y = \varphi(y)$. $\forall x\varphi(x) \to \forall y\varphi(y)$

   b) $\forall x \forall y \varphi(x,y) \to \forall x(\varphi(x,y))^y_x$

   c) $\forall x\varphi \to \exists x\varphi$

   d) $\forall x \forall x\varphi \longrightarrow \forall x\varphi$

   e) $\exists x \exists y\psi \to \exists y \exists x\psi$

   f) $\exists x\big[\varphi(x) \to \forall x\varphi(x)\big]$

4. Considere la siguiente relación entre enunciados. Dadas $\varphi, \psi \in \mathscr{L}^0_\rho$ decimos que

   $$\varphi \sim \psi \text{ syss } \vDash \varphi \leftrightarrow \psi$$

   a) Pruebe que dicha relación es de equivalencia.

b) Sea $[\varphi] = \{\alpha \in \mathscr{L}^0_\rho : \varphi \sim \alpha\}$. Definimos que para cualesquiera $\beta, \gamma \in \mathscr{L}^0_\rho$

$$[\beta] \leqslant [\gamma] \text{ syss } \vDash \beta \to \gamma$$

Pruebe que dicho orden esta bien definido, es decir, no depende de los representantes. También pruebe que es un orden parcial.

5. Pruebe que si $\alpha, \beta \in \mathscr{L}_\rho$, $\vDash \beta$. Así

$$\vDash \beta \leftrightarrow \alpha \text{ syss } \vDash \alpha$$