

Variables Libres y Acotadas

La forma cotidiana -por supuesto, en matemáticas- de usar las variables, envuelve dos maneras distintas. Veamos tres ejemplos:

I. Las integrales, en el plano real (\mathbb{R}^2) :

$$1. \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

$$a. \int_1^y \frac{1}{t} dt$$

$$b. \int_1^x \frac{1}{s} ds$$

Dicen lo mismo: **1.** y **b.**

Dicen cosas distintas: **1.** y **a.**

II. Las sumatorias, en los enteros (\mathbb{Z}) :

$$2. \sum_{i=1}^n a_i$$

$$c. \sum_{j=1}^n a_j$$

$$d. \sum_{i=1}^m a_i$$

Dicen lo mismo: **2.** y **c.**

Dicen cosas distintas: **2.** y **d.**

III. Los polinomios con coeficientes en los reales (\mathbb{R}) :

$$3. ax^2 + bx + c$$

$$e. ay^2 + by + c$$

$$f. a'x^2 + b'x + c'$$

Dicen lo mismo: **3.** y **e.**

Dicen cosas distintas: **3.** y **f.**

Es claro que hay dos maneras distintas de usar una variable. Unas se llaman *Acotadas* y las otras *Libres*. Tratemos de entresacar algunas de sus propiedades:

Variable Acotada: Variable de “adeveras” o “muda”; una verdadera variable, puede tomar todos los valores -del dominio de variabilidad- pero ninguno en particular.

Variable Libre: Variable de “hule”, “aparente”, puede ser cualquier cosa -elemento del dominio de variabilidad-, pero uno solo, inamovible durante el discurso.

Variable Acotada: Si se cambia la variable, por otra, *no* cambia el significado de la expresión.

Variable Libre: Si se cambia la variable, por otra, cambia el significado de la

expresión.

Son variables acotadas: En 1., t . En 2., i . En 3. x .

Son variables libres: En 1., x . En 2., n . En 3., a, b y c .

Entrando al terreno de lo formal, pero todavía de manera coloquial, podemos decir que una ocurrencia de la variable x en una fórmula β , es acotada en β si dicha ocurrencia de x , es la variable de un cuantificador que aparece en β , o está en el alcance de algún cuantificador “ $\forall x$ ” o “ $\exists x$ ” perteneciente a una subfórmula de β . Y será libre, dicha ocurrencia, en otro caso.

Una definición formal –con todo el rigor necesario– de variable libre o acotada, tiene que ser recursiva debido a la forma en que se definió ρ -fórmula. Hay varias maneras de hacerlo y aquí daremos dos. Para dar la primera necesitamos la noción de subfórmula de una fórmula.

Sea ρ un tipo de semejanza y \mathcal{L}_ρ un lenguaje de tipo ρ .

Definición Recursiva del Conjunto de Subfórmulas de una fórmula.

I] Si α es una fórmula atómica, entonces la única *Subfórmula de α* es ella misma, α .

II] 1. Sean $\alpha, \beta \in FRM_\rho$.

–) Las *Subfórmulas de $(\neg\alpha)$* son las subfórmulas de α y ella misma, $(\neg\alpha)$.

□) Las *Subfórmulas de $(\alpha \square \beta)$* son las subfórmulas de α , las subfórmulas de β y ella misma, $(\alpha \square \beta)$. Aquí hay que reemplazar el metasímbolo \square por todos y cada uno de los conectivos: $\&$, \vee , \rightarrow y \leftrightarrow .

2. Sean $\alpha \in FRM_\rho$ y $n \in \mathbb{N}$.

a) Las *Subfórmulas de $(\forall v_n \alpha)$* son las subfórmulas de α y ella misma.

b) Las *Subfórmulas de $(\exists v_n \alpha)$* son las subfórmulas de α y ella misma.

Con esta noción, podemos pasar a dar la definición formal de variable libre y acotada. Puesto que una variable puede ocurrir varias veces en una fórmula, la definición se hará para cada una de las ocurrencias.

Definición. Sean $x \in VAR$ y $\beta \in FRM_\rho$. Una ocurrencia de x en β , es Acotada en β si hay una subfórmula de β de la forma $(\forall x\alpha)$ o de la forma $(\exists x\alpha)$ y dicha ocurrencia es la variable del cuantificador o la ocurrencia está en α .

Pasemos a dar la otra parte.

Definición. Sean $\beta \in FRM_\rho$ y $x \in VAR_\rho$. Una ocurrencia de x en β es Libre, en β syss dicha ocurrencia **no** es acotada en β . Y decimos que x *Ocorre Libre* en β syss x tiene al menos una ocurrencia libre en β .

Ejemplos: Sea $\rho = \{P\} \cup \{f\} \cup \{c\}$, donde $P \in \mathcal{P}_2$, $f \in \mathcal{F}_1$ y $c \in \mathcal{C}$. Y Consideremos las siguientes ρ -fórmulas:

1. $P(x, y)$
2. $\exists z P(x, y)$
3. $\forall x P(x, y)$
4. $\exists x P(x, y) \rightarrow f(x) \approx c$
5. $\forall x (P(x, y) \rightarrow \forall y P(f(x), y))$

En **1.** y en **2.** las únicas ocurrencias de x y de y son libres y la única ocurrencia de z , es acotada en **2.** En **3.**, todas las ocurrencias de x son acotadas y la única de y es libre. En **4.**, las primeras dos ocurrencias de x son acotadas y la última es libre; la única de y es libre. En **5.**, todas las ocurrencias de x (a saber 3) son acotadas, la primera de y es libre y las otras dos, son acotadas.

Pasemos ahora a dar una segunda manera de definir formalmente estas nociones; también tiene que ser recursiva y la daremos para la ocurrencia libre de una variable. Esta tiene un defecto y haremos los comentarios pertinentes posteriormente a la definición.

Definición Recursiva de Una Variable Ocurra Libre en una Fórmula.

I] Sea α una ρ -atómica. La variable x *Ocorre Libre* en α syss x ocurre en α .

II] 1). Sean $\alpha, \beta \in FRM_\rho$.

\neg) La variable x *Ocorre Libre* en $(\neg\beta)$ syss x ocurre libre en β .

\square) La variable x *Ocorre Libre* en $(\beta \square \gamma)$ syss x ocurre libre en β u ocurre libre en γ .

Aquí hay que reemplazar el metasímbolo \square por todos y cada uno de los conectivos: $\&$, \vee , \rightarrow y \leftrightarrow .

2). Sean $\beta \in FRM_\rho$ y $x, y \in VAR$.

a) La variable x *Ocorre Libre* en $(\forall y\beta)$ syss $x \neq y$ y x ocurre libre en β .

b) La variable x *Ocorre Libre* en $(\exists y\beta)$ syss $x \neq y$ y x ocurre libre en β .

Obsérvese que lo que definimos es que “una variable ocurra libre en una fórmula”, pero no hemos dicho en que lugar ocurra. Por lo que una variable puede ocurrir libre y sin embargo tener ocurrencias que no son libres en la misma fórmula; p. e. vea **5.** Así, no es posible, de aquí, dar una definición de variable acotada. Sin embargo, si

podemos dar una definición de uno de los conceptos más importantes que necesitaremos.

Definición. Sea $\sigma \in FRM_\rho$. Diremos que σ es un *Enunciado de Tipo ρ* , en breve, ρ -*Enunciado* si y sólo si todas las ocurrencias de sus variables no son libres.

Notación: $\mathcal{L}_\rho^n = \{ \varphi \in \Phi_\rho / \text{en } \varphi \text{ aparecen a lo más } n \text{ variables libres} \}$

Así, $\mathcal{L}_\rho^0 = \{ \sigma \in FRM_\rho / \sigma \text{ es un } \rho\text{-enunciado} \}$.