Hiper–Reales

$^*\mathfrak{R}$

Pasemos a dar una construcción de un conjunto que tenga la misma estructura que la de los reales, que los contenga y tenga también elementos “infinitamente pequeños”, por supuesto usaremos el Metateorema de Compacidad para ello.

Sea $\mathfrak{R}$ la estructura saturación de $\mathbb{R}.$ Es decir, $\mathfrak{R}$ es la estructura (elemental) que tiene como universo a los números reales, $\mathbb{R},$ a todas las relaciones –de todas las aridades– a todas las operaciones –de todas las aridades– y a todos y cada uno de los números reales, como elementos distinguidos. Construimos un Lenguaje (Formal de 1er. orden) para $\mathfrak{R},$ de la siguiente manera,

Considere los siguientes conjuntos de símbolos formales. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+,$ sean:

a). $\mathcal{P}^n = \left\{P_R \;/\; R \subseteq \mathbb{R}^n\right\}$ y

b). $\mathcal{F}^n = \left\{F_f \;/\; f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\right\},$ y sea

c). $\mathcal{C} = \left\{C_r \;/\; r \in \mathbb{R}\right\}.$

Finalmente, tomamos como tipo de semejanza a,

$$\rho = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathcal{P}^n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathcal{F}^n\right) \cup \mathcal{C}$$

Y el lenguaje asociado a éste, $\mathcal{L}_\rho.$

Si interpretamos a $\mathcal{L}_\rho$ en $\mathbb{R},$ de forma canónica; es decir, si para cada $s \in \rho,$ ponemos $s^{\mathfrak{R}} = s;$ obtenemos que $\mathfrak{R} \in V_\rho.$

Pasemos ahora a construir una estructura “más rica” que $\mathfrak{R},$ que contenga elementos “infinítamente pequeños”. Sea

$$TEO(\mathfrak{R}) = \left\{\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho \;/\; \mathfrak{R} \models \sigma\right\}$$

Tenemos que $TEO(\mathfrak{R}),$ en $\mathcal{L}^0_\rho,$ es una Teoría, la cual es Completa y también Satisfacible. Esto último es porque tiene como modelo a $\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R} \models TEO(\mathfrak{R})$).

Ahora, tomemos un nuevo símbolo formal como una constante, digamos $D;$ es decir uno que no aparece en ρ ($D \notin \mathcal{C}$) y consideremos la extensión del lenguaje a $\rho' = \rho \cup \{D\}.$ Sea

$$\Delta = \left\{ C_0 \, P_< \, D \;\&\; D \, P_< \, C_r \;\;/\;\; r \in \mathbb{R}^+ \right\} \subseteq \mathcal{L}^0_{\rho'}$$

y consideremos a,

$$\Sigma = TEO(\mathfrak{R}) \cup \Delta \subseteq \mathcal{L}^0_{\rho'}$$

Proposición$_0$. Σ es satisfacible.

Prueba: Por el **MTC**, basta ver que Σ es finitamente satisfacible. Sea $\Gamma \in \wp_\omega(\Sigma)$. Sean $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ tales que $\{C_{r_1}, \ldots, C_{r_n}\} = \mathcal{C} \cap \rho(\Gamma)$ y sea

$$r_0 = \frac{min_<\{r_1, \ldots, r_n\}}{2}$$

Así $r_0 \in \mathbb{R}$ tal, que $0 < r_0 < min_<\{r_1, \ldots, r_n\}$. Si ponemos que $D^{\mathfrak{R}'} = r_0$, tenemos que $\langle \mathfrak{R}, r_0 \rangle \in V_{\rho'}$, que es una ρ'–expansión de $\mathfrak{R}$. Por construcción,

$$\langle \mathfrak{R}, r_0 \rangle \models \Gamma$$

Teniendo pues que, Γ es satisfacible. Con esto, Σ es finitamente satisfacible. †

Al ser Σ satisfacible, en $\mathcal{L}^0_{\rho'}$, hay una $\mathfrak{A}' \in V_{\rho'}$ tal, que $\mathfrak{A}' \models \Sigma$. Además, ya que $\mathcal{L}_{\rho'}$ es una extensión de $\mathcal{L}_\rho$, hay una $\mathfrak{A} \in V_\rho$ tal que,

- $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction \rho$
- $\mathfrak{A}' = \left\langle \mathfrak{A} \,,\, D^{\mathfrak{A}'} \right\rangle$. Con $D^{\mathfrak{A}'} \in \|\mathfrak{A}'\| = \|\mathfrak{A}\| = A$
- $\left\langle \mathfrak{A} \,,\, D^{\mathfrak{A}'} \right\rangle \models TEO(\mathfrak{R}) \cup \Delta$

De ahora en adelante, solo nos fijaremos en la ρ–estructura $\mathfrak{A}$. Todo lo anterior, lo podemos resumir en la siguiente,

Proposición$_1$. Hay una $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y un $a_0 \in \|\mathfrak{A}\| = A$ tales que,

1. $\mathfrak{A} \models TEO(\mathfrak{R})$ y
2. Para todo $r \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathfrak{A} \models \left(C_0 \, P_< \, x \;\&\; x \, P_< \, C_r \right) \left[\;\; a_0 \;\; \right]$$

Prueba: Basta mencionar que $TEO(\mathfrak{R}) \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction \rho$ y tomar $a_0 = D^{\mathfrak{A}'}$. †

Debido a la naturaleza de la prueba de la existencia de la estructura $\mathfrak{A}'$ y por tanto de la de $\mathfrak{A}$ –basada en el **MTC** y por tanto en el **A**xioma de **E**lección– no podemos decir ni quienes son ni cómo son, los elementos de su universo, de A. Ahora bien, lo que vamos a hacer es ver las relaciones que hay entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{R}$. Para ello, necesitaremos introducir nuevas nociones.

Definición$_1$. Sean ρ^* un tipo de semejanza arbitrario y $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \in V_{\rho^*}$.
Diremos que $\mathfrak{B}$ es *Elementalmente Equivalente* a $\mathfrak{C}$ syss

$$\dot{\forall}\ \sigma \in \mathcal{L}^0_{\rho^*} \left[\mathfrak{B} \models \sigma \text{ syss } \mathfrak{C} \models \sigma \right]$$

Lo cual denotamos por $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$.

No es dificil probar que $\equiv$ es una relacional de equivalencia, entre estructuras del mismo tipo.

Proposición$_2$. $\mathfrak{R} \equiv \mathfrak{A}$.
Prueba: Sea $\sigma \in \mathcal{L}^0_\rho$. Probemos que $\mathfrak{R} \models \sigma$ syss $\mathfrak{A} \models \sigma$.

$\Rightarrow\Big]$ Si $\mathfrak{R} \models \sigma,$ entonces $\sigma \in TEO(\mathfrak{R})$ y como $\mathfrak{A} \models TEO(\mathfrak{R}),$ tenemos que $\mathfrak{A} \models \sigma.$

$\Leftarrow\Big]$ Supongamos que $\mathfrak{R} \not\models \sigma.$ Así, $\mathfrak{R} \models \neg\sigma;$ pero entonces, $\neg\sigma \in TEO(\mathfrak{R}).$ Así, $\mathfrak{A} \models \neg\sigma$ y por tanto $\mathfrak{A} \not\models \sigma.$ †

Este resultado nos está diciendo que *toda afirmación que podamos expresar en el lenguaje formal de 1er. orden*, si fuera verdad en $\mathfrak{R}$ también lo sería en $\mathfrak{A}$ y viceversa. Por ejemplo, se puede decir, en 1er. orden, ser un orden total, denso, sin extremos y como es verdad en $\mathfrak{R}$ también lo será en $\mathfrak{A}.$ También se puede decir lo mismo de ser un campo.

Veamos que hay una "copia fiel" de $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{A}.$ Para ello necesitamos una,

Definición$_2$. Sea ρ^* un tipo de semejanza arbitrario y $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \in V_{\rho^*}$.
I. Diremos que h es un *Homomorfismo de* $\mathfrak{B}$ *en* $\mathfrak{C}$ syss

1. $h : B \to C$

2. h preserva estructura. Es decir,

a. h preserva relaciones:
Si $n \in \mathbb{Z}^+$, $P \in \mathcal{P}^n$ y $b_1, \ldots, b_n \in B$, se tiene que

$$\langle b_1, \ldots, b_n \rangle \in P^{\mathfrak{B}} \text{ syss } \langle h(b_1), \ldots, h(b_n) \rangle \in P^{\mathfrak{C}}$$

b. h preserva operaciones:
Si $n \in \mathbb{Z}^+$ y $F \in \mathcal{F}^n$, entonces para $b_1, \ldots, b_n \in B$

$$h\left(F^{\mathfrak{B}}\left(b_1, \ldots, b_n\right)\right) = F^{\mathfrak{C}}\left(h(b_1), \ldots, h(b_n)\right)$$

c. h manda elementos distinguidos en elementos distinguidos:
Si $C \in \mathcal{C}$, entonces

$$h(C^{\mathfrak{B}}) = C^{\mathfrak{C}}$$

Notación: $h : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$.

II.

1. Diremos que h es un *Monomorfismo,* o un *Encaje de* $\mathfrak{B}$ *en* $\mathfrak{C}$ syss h es un homomorfismo inyectivo de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{C}$. Y se denota por: $\mathfrak{B} \underset{h}{\hookrightarrow} \mathfrak{C}$.

2. Diremos que h es un *Epimorfismo de* $\mathfrak{B}$ *en* $\mathfrak{C}$ syss h es un homomorfismo suprayectivo de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{C}$. También se dice que h es un homomorfismo de $\mathfrak{B}$ sobre $\mathfrak{C}$.

3. Diremos que h es un *Isomorfismo de* $\mathfrak{B}$ *en* $\mathfrak{C}$ syss h es un homomorfismo biyectivo de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{C}$. Y se denota por: $\mathfrak{B} \underset{h}{\simeq} \mathfrak{C}$.

Veamos lo que ocurre entre $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{A}$.

Definición$_3$. Sea

$$h : \mathbb{R} \to A$$
$$\dot{\forall}\ r \in \mathbb{R},\quad h(r) = (C_r)^{\mathfrak{A}}$$

Proposición$_3$. La función h es un monomorfismo de $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{A}$. En símbolos,

$$\mathfrak{R} \underset{h}{\hookrightarrow} \mathfrak{A}$$

Prueba: Hay que ver que h es una función inyectiva que preserva las estructuras:

a). h es inyectiva:

Sean $r, s \in \mathbb{R}$ con $r \neq s$; entonces $\mathfrak{R} \models \neg(C_r \approx C_s)$. Por lo que, $\mathfrak{A} \models \neg(C_r \approx C_s)$ y así, $h(r) = (C_r)^{\mathfrak{A}} \neq (C_s)^{\mathfrak{A}} = h(s)$.

b). h preserva relaciones.

Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $P_R \in \mathcal{P}^n$, con $R \subseteq \mathbb{R}^n$. Así, para $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ tenemos,

$$\begin{array}{llll}
\langle r_1, \ldots, r_n \rangle \in (P_R)^{\mathfrak{R}} & \text{syss} & \mathfrak{R} \models P_R\big(C_{r_1}, \ldots, C_{r_n}\big) & \text{Tarski} \\
 & \text{syss} & \mathfrak{A} \models P_R\big(C_{r_1}, \ldots, C_{r_n}\big) & \mathfrak{R} \equiv \mathfrak{A} \\
 & \text{syss} & \big\langle (C_{r_1})^{\mathfrak{A}}, \ldots, (C_{r_n})^{\mathfrak{A}} \big\rangle \in (P_R)^{\mathfrak{A}} & \text{Tarski} \\
 & \text{syss} & \big\langle h(r_1), \ldots, h(r_n) \big\rangle \in (P_R)^{\mathfrak{A}} & \text{def. } h
\end{array}$$

c). h preserva operaciones.

Sean $n \in \mathbb{Z}^+$, $F_f \in \mathcal{F}^n$ con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{array}{llll}
h\Big((F_f)^{\mathfrak{R}}\big(r_1, \ldots, r_n\big)\Big) & = & h\Big(f\big(r_1, \ldots, r_n\big)\Big) & (F_f)^{\mathfrak{R}} = f \\
 & = & \Big(C_{f(r_1, \ldots, r_n)}\Big)^{\mathfrak{A}} & \text{def. } h \\
 & = & (F_f)^{\mathfrak{A}}\big((C_{r_1})^{\mathfrak{A}}, \ldots, (C_{r_n})^{\mathfrak{A}}\big) & (*) \\
 & = & (F_f)^{\mathfrak{A}}\big(h(r_1), \ldots, h(r_n)\big) & \text{def. } h
\end{array}$$

$(*)$: Puesto que $f(r_1, \ldots, r_n) = f(r_1, \ldots, r_n)$, tenemos que:
$\mathfrak{R} \models F_f(C_{r_1}, \ldots, C_{r_n}) \approx C_{f(r_1,\ldots,r_n)}$, y como $\mathfrak{R} \equiv \mathfrak{A}$, también tenemos que
$\mathfrak{A} \models F_f(C_{r_1}, \ldots, C_{r_n}) \approx C_{f(r_1,\ldots,r_n)}$. Es decir:

$$(F_f)^{\mathfrak{A}}\big((C_{r_1})^{\mathfrak{A}}, \ldots, (C_{r_n})^{\mathfrak{A}}\big) = \big(C_{f(r_1,\ldots,r_n)}\big)^{\mathfrak{A}}$$

d). h manda elementos distinguidos en elementos distinguidos:
Sea $C_r \in \mathcal{C}$, con $r \in \mathbb{R}$. Así, $h\big((C_r)^{\mathfrak{R}} \big) = h(r) = (C_r)^{\mathfrak{A}}$. †

Hay pues, una "copia fiel" de $\mathbb{R}$ en A –a saber, $h[\mathbb{R}]$– Esto se presta para pensar que A "extiende" a $\mathbb{R}$ y se podría trabajar en A, suponiendo que $\mathbb{R} \subseteq A$. Rigurosamente hablando, **no** es el caso. Ésta idea la podemos rescatar.

Proposición$_4$. Hay una ρ–estructura ${}^*\mathfrak{R}$ tal, que

$$\|{}^*\mathfrak{R}\| \supseteq \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \mathfrak{A} \simeq {}^*\mathfrak{R}.$$

Prueba: En el caso en que $\mathbb{R} \cap \|\mathfrak{A}\| = \emptyset$, la siguiente construcción se podría simplificar.

Partimos de que $A = \|\mathfrak{A}\|$ y $\mathfrak{R} \underset{h}{\hookrightarrow} \mathfrak{A}$. Por lo pronto, $h : \mathbb{R} >\!\!\!\rightarrow\!\!> h[\mathbb{R}]$ y la función h^{-1} está perfectamente definida.

Ahora bien, consideremos a un conjunto B tal, que $B \cap \mathbb{R} = \emptyset$ y $A \sim B$. y supongamos que $j : A >\!\!\!\rightarrow\!\!> B$.

Sea g la única función cuyo dominio es A y tiene como regla a la siguiente,

$$\text{Para todo } a \in A,\ g(a) = \begin{cases} j(a) & \text{si} \quad a \notin h\,[\mathbb{R}] \\ \text{o} & \\ h^{-1}(a) & \text{si} \quad a \in h\,[\mathbb{R}] \end{cases}$$

La función g es inyectiva, y es suprayectiva en su imagen, $g\,[A]$. Por construcción, se tiene que $\mathbb{R} = h^{-1}\big[\ h[\mathbb{R}]\ \big] = g\big[\ h[\mathbb{R}]\ \big] \subseteq g\,[A]$ o si se prefiere,
$g\,[A] = \big(B \setminus j\big[\ h[\mathbb{R}]\ \big]\big) \cup \mathbb{R}$.

Dotamos a $g\,[A]$ de estructura de tipo ρ; a la cual la denotaremos por ${}^*\mathfrak{R}$ y será de tal suerte que $\mathfrak{A} \underset{g}{\simeq} {}^*\mathfrak{R}$.

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$.

I. Para $P_R \in \mathcal{P}^n_\rho$, sea $(P_R)^{{}^*\mathfrak{R}} = {}^*R$, donde,
${}^*R \subseteq g\,[A]^n$ tal, que para todos $s_1, \ldots, s_n \in g\,[A]$,

$$\langle s_1, \ldots, s_n \rangle \in {}^*R \text{ syss } \langle g^{-1}(s_1), \ldots, g^{-1}(s_n) \rangle \in P_R^{\mathfrak{A}}$$

II. Para $F_f \in \mathcal{F}^n_\rho$, sea $(F_f)^{{}^*\mathfrak{R}} = {}^*f$, donde,
${}^*f : g\,[A]^n \to g\,[A]$ tal, que para todos $s_1, \ldots, s_n \in g\,[A]$,

$${}^*f(s_1, \ldots, s_n) = g\big((F_f)^{\mathfrak{A}}\big(g^{-1}(s_1), \ldots, g^{-1}(s_n)\big)\big)$$

III. Para $C_r \in \mathcal{C}_\rho$, sea $(C_r)^{*\mathfrak{R}} = r$.

Por construcción, tenemos que: ${}^*\mathfrak{R} \in V_\rho$, $\|{}^*\mathfrak{R}\| = g\,[A] \supseteq \mathbb{R}$ y $\mathfrak{A} \underset{g}{\simeq} {}^*\mathfrak{R}$. †

Se deja al lector verificar que efectivamente g es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ en ${}^*\mathfrak{R}$.

Recapitulemos sobre la construcción anterior. Efectivamente, los números reales, $\mathbb{R}$, están contenidos en el universo de la nueva estructura, ${}^*\mathfrak{R}$, pero dicha construcción nos da mucho más que eso. Resulta que las "nuevas" relaciones son extensiones de las anteriores, las operaciones "viejas" no son más que las restricciones de las "nuevas" y tenemos como elementos distinguidos a los mismos individuos. Esto que está ocurriendo entre nuestras estructuras, entre $\mathfrak{R}$ y ${}^*\mathfrak{R}$, lleva un nombre, pasemos a definirlo formalmente.

Definición$_4$. Sea ρ^* un tipo de semejanza arbitrario y $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \in V_{\rho^*}$. Diremos que $\mathfrak{B}$ es una *Subestructura (Simple)* de $\mathfrak{C}$, en símbolos, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$ syss

0). $B = \|\mathfrak{B}\| \subseteq \|\mathfrak{C}\| = C$

i). Si $P \in \mathcal{P}^n_{\rho^*}$, entonces $P^{\mathfrak{B}} = P^{\mathfrak{C}} \cap B^n$.

ii). Si $F \in \mathcal{F}^n_{\rho^*}$, entonces $F^{\mathfrak{B}} = F^{\mathfrak{C}} \restriction \mathbb{R}^n$.

iii). Si $C \in \mathcal{C}_{\rho^*}$, entonces $C^{\mathfrak{B}} = C^{\mathfrak{C}}$.

Tenemos pues, el siguiente

Corolario$_5$. $\mathfrak{R} \subseteq {}^*\mathfrak{R}$. Es decir,

0). $\|\mathfrak{R}\| = \mathbb{R} \subseteq g\,[A] = \|{}^*\mathfrak{R}\|$.

i). Si $P_R \in \mathcal{P}^n_\rho$, entonces $R = (P_R)^{\mathfrak{R}} = (P_R)^{*\mathfrak{R}} \cap \mathbb{R}^n = {}^*R \cap \mathbb{R}^n$

ii). Si $F_f \in \mathcal{P}^n_\rho$, entonces $f = (F_f)^{\mathfrak{R}} = (F_f)^{*\mathfrak{R}} \restriction \mathbb{R}^n = {}^*f \restriction \mathbb{R}^n$

iii). Si $C_r \in \mathcal{C}_\rho$, entonces $(C_r)^{\mathfrak{R}} = r = (C_r)^{*\mathfrak{R}}$.

Prueba: **TAREA**. †

Más adelante, veremos que $\mathfrak{R}$ y ${}^*\mathfrak{R}$ guardan una relación más productiva que la de ser una subestructura.

Un par de resultados que nos ayudarán para saber algo más de ${}^*\mathfrak{R}$.

Proposición$_6$. (Metateorema del Isomorfismo).
Sea ρ^* un tipo de semejanza arbitrario y sean $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \in V_{\rho^*}$ tales que $\mathfrak{B} \underset{h}{\simeq} \mathfrak{C}$. Así,

Para toda $\varphi \in \mathcal{L}^n_\rho$ y todos $b_1, \ldots, b_n \in B$,

$$\mathfrak{B} \models \varphi \left[b_1, \ldots, b_n \right] \text{ syss } \mathfrak{C} \models \varphi \left[h(b_1), \ldots, h(b_n) \right]$$

Prueba: **PENDIENTE**. †

Corolario$_7$. Sea ρ^* un tipo de semejanza arbitrario y sean $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \in V_{\rho^*}$.

$$\text{Si } \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C}, \text{ entonces } \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C}$$

Prueba: Supongamos que $\mathfrak{B} \underset{h}{\simeq} \mathfrak{C}$ y que $\sigma \in \mathcal{L}^0_{\rho^*}$. Así, para cualquier $b \in B$,

$$\mathfrak{B} \models \sigma \text{ syss } \mathfrak{B} \models \sigma\ [b] \text{ syss } \mathfrak{C} \models \sigma\ [h(b)] \text{ syss } \mathfrak{C} \models \sigma$$ †

Corolario$_8$. $\mathfrak{R} \equiv {}^*\mathfrak{R}$.
Prueba: Puesto que $\mathfrak{A} \simeq {}^*\mathfrak{R}$, tenemos que $\mathfrak{A} \equiv {}^*\mathfrak{R}$. De esto y de la **Proposición$_2$** obtenemos que $\mathfrak{R} \equiv {}^*\mathfrak{R}$. †

Ejemplos:

1. $\| {}^*\mathfrak{R} \| = g\,[A] = (P_\mathbb{R})^{{}^*\mathfrak{R}} = {}^*\mathbb{R}$.
Pues $\mathfrak{R} \models \forall x\, P_\mathbb{R}(x)$ y por tanto ${}^*\mathfrak{R} \models \forall x\, P_\mathbb{R}(x)$.
A los elementos de ${}^*\mathbb{R}$ les llamaremos, *Hiperreales.*

2. Si $r \in \mathbb{R}$, entonces $C_r \in \mathcal{C}$ y $(C_r)^{{}^*\mathfrak{R}} = r = (C_r)^{\mathfrak{R}}$.
A los elementos *de* $\mathbb{R}$ les llamaremos, *Reales Estandar.*

3. Sea $i_0 = g(a_0)\ (= j(a_0))$. Así, $i_0 \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$.
A los elementos de ${}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ les llamaremos, *Reales No–Estandar.*

4. $\left\langle {}^*\mathbb{R} , {}^*< \right\rangle$ es un orden denso, sin extremos. Pues $\left\langle \mathbb{R}, < \right\rangle$ lo es.

5. Para todo $r \in \mathbb{R}^+$, se tiene que $0 \ {}^*\!< \ i_0 \ {}^*\!< \ r$.
Tenemos que si $r \in \mathbb{R}^+$, entonces $\mathfrak{A} \models \left(C_0\, P_< \,x\ \&\ x\, P_<\, C_r \right) [a_0]$. Puesto que $\mathfrak{A} \underset{g}{\simeq} {}^*\mathfrak{R}$, se tiene que ${}^*\mathfrak{R} \models \left(C_0\, P_< \,x\ \&\ x\, P_<\, C_r \right) \left[\ g(a_0)\ \right]$.

6. $\left\langle {}^*\mathbb{R} , {}^*+ , {}^*\cdot , 0 , 1 \right\rangle$ es un campo.

7. Las operaciones de ${}^*+$ y de ${}^*\cdot$ son compatibles (y por tanto congruentes) con el orden, ${}^*<$. Así, $\left\langle {}^*\mathbb{R} , {}^*< , {}^*+ , {}^*\cdot , 0 , 1 \right\rangle$ es un campo ordenado. Además, tiene a $\left\langle \mathbb{R} , < , + , \cdot , 0 , 1 \right\rangle$ como un subcampo (propio).

8. Se tiene que, $0 \ {}^*\!< n \cdot i_0 \ {}^*\!< r$, para todo $r \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{Z}^+$.

9. El inverso aditivo de i_0, a saber $({}^*-)\ i_0$, es un hiperreal (de hecho un real no-estandar) que en el orden $^*<$, es un negativo, pero mayor que todo real estandar negativo.

10. El inverso multiplicativo de i_0, a saber $(i_0)^{*(-1)}$, es un hiperreal que es mayor, en el orden $^*<$, que todo real estandar; es decir, para todo $r \in \mathbb{R}$, se tiene que $r \, ^*< i_0^{*(-1)}$.
Basta probarlo para el caso en que $r \in \mathbb{R}^+$. Sea pues, $r > 0$, así $0 < r^{-1}$ y por como es i_0 tenemos, $i_0 \, ^*< r^{-1}$. Por lo que al multiplicar por el inverso multiplicativo de i_0, obtenemos: $1 \, ^*< (r^{-1}) \, ^*\cdot \left(i_0^{*(-1)}\right)$ y de aquí, multiplicando por r, tenemos $r \, ^*< i_0^{*(-1)}$.

11. Se tiene que $r \, ^*< 2^{*(-1)} \, ^*\cdot \, i_0 \, ^*< \, i_0$, para todo $r \in \mathbb{R}$.

12. Para cualesquiera $r, s \in \mathbb{R}$ se tiene que,
si $r \, ^*< s$, entonces $\left(r \, ^*+ i_0\right) \, ^*< s$.

Corolario$_9$. $^*\mathbb{R}$ no cumple con la propiedad Arquimideana, es decir, es no–arquimideana.
Prueba: Basta comparar i_0 con el real estandar 1 (ver **Ejem$_8$**). Otro contra–ejemplo nos lo da comparar cualquier real estandar con $i_0^{*(-1)}$ (ver **Ejem$_{10}$**). Ambas parejas, son testigos de la no–arquimideanidad de $^*\mathbb{R}$. †

Corolario$_{10}$. $^*\mathbb{R}$ no cumple con el axioma del supremo, es decir, no es completo.
Prueba: $\mathbb{R} \subseteq \, ^*\mathbb{R}$ está acotado superiormente, por ejemplo por $i_0^{*(-1)}$; y no tiene un supremo (ver **Ejem$_{11}$**). †

Observación: Estas proposiciones nos dicen que las propiedades de “ser Completo” y “ser Arquimideano” **no se pueden expresar como enunciados en un Lenguaje Formal de primer Orden**. A esto se le suele decir que **no** son *propiedades elementales* o **no** son *propiedades de primer orden.*

Corolario$_{11}$. $\langle \mathbb{R} \, , \; < \rangle \not\simeq \langle {}^*\mathbb{R} \, , \, ^*< \rangle$
Prueba: Los isomorfismos preservan “ser cota superior” y por tanto manda “supremos” en “supremos”. Por tanto los isomorfismos preservan “ser completo”. Sabemos que $\mathbb{R}$ es completo y no así $^*\mathbb{R}$. †

Se tiene, pues, que los isomorfismos preservan el “ser completo” a pesar de no ser una propiedad de primer orden.

Pasemos ahora a ver la relación más estrecha que hay entre $\mathfrak{R}$ y ${}^*\mathfrak{R}$.

Definición₅. Sea ρ^* un tipo de semejanza arbitrario y $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \in V_{\rho^*}$. Diremos que $\mathfrak{B}$ es una *Subestructura Elemental* de $\mathfrak{C}$, en símbolos, $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{C}$, syss

1. $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$
2. Para toda $\varphi \in \mathcal{L}_\rho^n$ y todos $b_1, \ldots, b_n \in B$,

$$\mathfrak{B} \models \varphi\left[b_1, \ldots, b_n\right] \text{ syss } \mathfrak{C} \models \varphi\left[b_1, \ldots, b_n\right]$$

Proposición₁₂ (**Principio de Transferencia**).
$\mathfrak{R}$ es una subestructura elemental de ${}^*\mathfrak{R}$. En símbolos,

$$\mathfrak{R} \preceq {}^*\mathfrak{R}$$

Prueba: Solo nos falta ver **2**.
Sean pues, $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}_\rho^n$ y $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{llll}
\mathfrak{R} \models \varphi(x_1,\ldots,x_n)[r_1,\ldots,r_n] & \text{syss} & \mathfrak{R} \models \varphi(x_1,\ldots,x_n)\left[C_{r_1}^{\mathfrak{R}}, \ \ldots \ , C_{r_n}^{\mathfrak{R}}\right] & C_{r_i}^{\mathfrak{R}} = r_i \\
& \text{syss} & \mathfrak{R} \models \varphi(C_{r_1}, \ldots, C_{r_n}) & \textbf{MTS} \\
& \text{syss} & {}^*\mathfrak{R} \models \varphi(C_{r_1}, \ldots, C_{r_n}) & \mathfrak{R} \equiv {}^*\mathfrak{R} \\
& \text{syss} & {}^*\mathfrak{R} \models \varphi(x_1,\ldots,x_n)\left[C_{r_1}^{*\mathfrak{R}}, \ \ldots \ , C_{r_n}^{*\mathfrak{R}}\right] & \textbf{MTS} \\
& \text{syss} & {}^*\mathfrak{R} \models \varphi(x_1,\ldots,x_n)[r_1,\ldots,r_n] & C_{r_i}^{*\mathfrak{R}} = r_i
\end{array}$$

†

Muchos autores —textos sobre Análisis no–estandar— a lo que le llaman el *Principio de Transferencia* es al punto **2**. de la definición anterior.

Pasemos ahora a ver más de cerca las propiedades de ${}^*\mathbb{R}$.

Convención: De ahora en adelante, por lo excesivo de la notación, **no** pondremos el asterisco $(*)$ sobre las relaciones y operaciones de ${}^*\mathbb{R}$.

Definición$_6$. Sea $a \in {}^*\mathbb{R}$. Decimos que,

i). a es un *Finito* syss hay un $r \in \mathbb{R}$, tal que $|\, a \,| < r$. Sea FIN el conjunto de los hiperreales finitos.

ii). a es un *Infinito* syss para todo $r \in \mathbb{R}$, $|\, a \,| > r$, es decir $a \in {}^*\mathbb{R} \setminus FIN$.

iii). a es un *Infinitesimal* para todo $r \in \mathbb{R}^+$, $|\, a \,| < r$. Sea Inf el conjunto de los hiperreales infinitesimales.

Observación: El 0 es un infinitesimal. Esto no entra en la idea original de dicha noción sin embargo, por cuestiones técnicas, aquí lo consideraremos como tal. De hecho:

$$\mathbb{R} \cap Inf = \{0\}$$

El cero, 0, es el único infinitesimal estandar.

Ejemplos:

1. $\mathbb{R} \subsetneq FIN \subsetneq {}^*\mathbb{R}$

2. $Inf \subsetneq FIN$.

a. $i_0,\ \frac{i_0}{2},\ 2i_0 \in Inf$

b. $(i_0)^{-1},\ \left(\frac{i_0}{2}\right)^{-1},\ (2i_0)^{-1} \in {}^*\mathbb{R} \setminus FIN$

c. $\frac{i_0}{2} < i_0 < 2i_0$ y $\frac{1}{2i_0} < \frac{1}{i_0} < \frac{2}{i_0}$

3. Si $r \in \mathbb{R}$ e $i \in Inf$, entonces $r \pm i \in FIN$.

4. Si $r \in \mathbb{R}$ e $i \in Inf^+$, entonces $r < i^{-1} - 1 < i^{-1} < i^{-1} + 1$