

## METATEOREMA DE COMPACIDAD

Pasemos ahora a la prueba del Metateorema de Compacidad. Antes necesitamos unos resultados:

**Lema**<sub>1</sub>.  $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$ . Si  $\Sigma$  es finitamente satisfacible, entonces hay un  $\Gamma$  tal que

- i).  $\Sigma \subseteq \Gamma \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$ .
- ii).  $\Gamma$  es finitamente satisfacible.
- iii).  $\Gamma$  es  $f$ -teoría  $f$ -completa.

Daremos dos pruebas.

**1a. Prueba.** Supongamos que  $|\rho| \leq \aleph_0$ . Una prueba general, es decir que el cardinal de  $\rho$  fuera arbitrario, necesitaría técnicas que no tenemos a la mano (a saber el Esquema General de Recusión para Ordinales). Tenemos pues que,  $|\mathcal{L}_\rho| = \aleph_0$ ,  $|EXP_\rho| = \aleph_0$ ,  $|FRM_\rho| = \aleph_0$  y  $|\mathcal{L}_\rho^0| = \aleph_0$ . Sea  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una enumeración de todos los  $\rho$ -enunciados. Definimos recursivamente la familia  $\{\Gamma_n / n \in \mathbb{N}\}$  como sigue:

I)  $\Gamma_0 = \Sigma$ .

II) Si  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\sigma_n\} & \text{si } \Gamma_n \cup \{\sigma_n\} \text{ es finitamente satisfacible} \\ \mathbf{0} & \\ \Gamma_n \cup \{\neg\sigma_n\} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea  $\Gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ .

**Observación.** La colección  $\{\Gamma_n / n \in \mathbb{N}\}$  forma una  $\subseteq$ -cadena, es decir:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \text{ Si } n < m, \text{ entonces } \Gamma_n \subseteq \Gamma_m.$$

Afirmamos que  $\Gamma$  cumple con lo requerido:

i).  $\Sigma = \Gamma_0 \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n = \Gamma$  y como  $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma_n \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$  tenemos que  $\Gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$ .

ii). Gracias a la **Proposición**<sub>12</sub>, basta probar que  $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma_n$  es finitamente satisfacible. Y esto lo haremos por Inducción:

a).  $\Gamma_0$  es finitamente satisfacible; pues  $\Gamma_0 = \Sigma$ .

b). Sea  $n \in \mathbb{N}$  arbitrario y supongamos inductivamente que  $\Gamma_n$  es finitamente satisfacible; veamos que  $\Gamma_{n+1}$  también lo es. Consideremos ahora a  $\Gamma_n \cup \{\sigma_n\}$ . Si éste es finitamente satisfacible, entonces  $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\sigma_n\}$  y  $\Gamma_{n+1}$  es finitamente satisfacible. En cambio si no lo es, entonces, por la **Proposición**<sub>11</sub>,  $\Gamma_n \cup \{\neg\sigma_n\} = \Gamma_{n+1}$  es finitamente satisfacible.

iii). Para probar que  $\Gamma$  es una  $f$ -teoría  $f$ -completa, en virtud de la **Proposición**<sub>10.3</sub>

y de **ii).**, es suficiente con probar que si  $\sigma \in \mathcal{L}_\rho^0$ , entonces  $\sigma \in \Gamma$  o  $\neg\sigma \in \Gamma$ . Como  $\sigma \in \mathcal{L}_\rho^0 = \{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , hay un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\sigma_{n_0} = \sigma$ . De la definición de  $\Gamma_{n_0+1}$ , tenemos que  $\sigma_{n_0} \in \Gamma_{n_0+1}$  o  $\neg\sigma_{n_0} \in \Gamma_{n_0+1}$  en cualquier caso tenemos que  $\sigma_{n_0} \in \Gamma$  o  $\neg\sigma_{n_0} \in \Gamma$ . †

Otra prueba del **Lema**<sub>1</sub>, ahora no importará la cardinalidad del lenguaje, es usando una versión del Axioma de Elección, a saber el Lema de Zorn (**LZ**).

**2a. Prueba:** Sea

$$A = \left\{ \Delta \subseteq \mathcal{L}_\rho^0 \mid \Delta \supseteq \Sigma \text{ y } \Delta \text{ es finitamente satisfacible} \right\}$$

Así,  $\langle A, \subseteq \rangle \in \text{COPO}$ . Veamos que se cumplen las hipótesis del Lema de Zorn, es decir que toda cadena de  $A$  está acotada superiormente. Pero esto es inmediato de la **Proposición**<sub>12</sub> (la unión de la cadena es la cota superior buscada). Así, por el **LZ**,  $\langle A, \subseteq \rangle$  tiene un elemento  $\subseteq$ -maximal, digamos  $\Gamma$ . Este tiene las propiedades siguientes:

**a).**  $\Gamma \in A$ . Es decir  $\Sigma \subseteq \Gamma \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$  y  $\Gamma$  es finitamente satisfacible. Y

**b).** Si  $\Delta \in A$  y es tal que  $\Delta \supseteq \Gamma$ , entonces  $\Delta = \Gamma$ .

Veamos que  $\Gamma$  es el buscado.  $\Gamma$  cumple con **i).** y **ii).** gracias al **a).** Para ver que cumple con **iii).** basta, por la **Proposición**<sub>10.3</sub> y de que tenemos **ii).**, ver que

$$\forall \sigma \in \mathcal{L}_\rho^0 \left[ \sigma \in \Gamma \text{ o } \neg\sigma \in \Gamma \right]$$

Sea pues,  $\sigma \in \mathcal{L}_\rho^0$ . Puesto que  $\Gamma$  es finitamente satisfacible, por la **Proposición**<sub>11</sub>, sabemos que  $\Gamma_1 = \Gamma \cup \{\sigma\}$  es finitamente satisfacible o  $\Gamma_2 = \Gamma \cup \{\neg\sigma\}$  es finitamente satisfacible. Puesto que ambos conjuntos contienen a  $\Gamma$ , por **b).**, tenemos que  $\Gamma_1 = \Gamma$  o que  $\Gamma_2 = \Gamma$ , en cualquier caso tenemos que  $\sigma \in \Gamma$  o  $\neg\sigma \in \Gamma$ . †