Pasemos ahora al tercer resultado necesario para nuestra prueba del Metateorema de Compacidad. Antes una,

Definición. Sea $T \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$. Diremos que T es una *Teoría de Henkin* syss T es una f–teoría, f–completa, finítamente satisfacible y cerrada bajo testigos.

El resultado dice así,

Lema$_3$. Todo conjunto de enunciados finítamente satisfacible, se puede extender a una Teoría de Henkin:

Si $\Sigma \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$, finitamente satisfacible, entonces hay una T tal, que:

i). $\Sigma \subseteq T \subseteq \mathcal{L}^0_{\rho'}$, con $\rho' \supseteq \rho$. Y

ii). T es una teoría de Henkin.

Prueba. Para cada conjunto Φ de enunciados finítamente satisfacible, escribiremos $ECO(\Phi)$ y $ECT(\Phi)$ para denotar a uno de los conjuntos cuya existencia se garantizan en el **Lema**$_1$ y en el **Lema**$_2$, respectivamente.

Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}^0_\rho$ un conjunto finitamente satisfacible.

Definimos Recursivamente $\left\{T_n \ / \ n \in \mathbb{N}\right\}$, una familia de conjuntos de enunciados como sigue,

I). $T_0 = \Sigma$.

II). a) $\dot{\forall}\ n \in \mathbb{N}, \quad T_{2n+1} = ECO(T_{2n})$

b) $\dot{\forall}\ n \in \mathbb{N}, \quad T_{2n+2} = ECT(T_{2n+1})$

Así tenemos,

$$\Sigma \subseteq ECO(\Sigma) \subseteq ECT(ECO(\Sigma)) \subseteq ECO(T_2) \subseteq ECT(T_3) \subseteq \ \dots \ \subseteq \ \dots$$

Algunas observaciones que se desprenden de la definición anterior son:

1). $\dot{\forall}\ n, m \in \mathbb{N}\left(T_n \subseteq T_m \ \dot{\vee}\ T_m \subseteq T_n\right)$. Es decir, $\left\{\ T_n\ \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ forma una $\subseteq$–cadena. Inmediato del **Lema**$_{\mathbf{1.i)}}$ y del **Lema**$_{\mathbf{2.i)}}$.

2). **a**) $\dot{\forall}\ n \in \mathbb{N},\quad \rho(T_{2n}) = \rho(T_{2n+1})$ Inmediato del **Lema**$_{\mathbf{1.i)}}$

b) $\dot{\forall}\ n \in \mathbb{N},\quad \rho(T_{2n+1}) \subseteq \rho(T_{2n+2})$ Inmediato del **Lema**$_{\mathbf{2.i)}}$

c) $\dot{\forall}\ n \in \mathbb{N},\quad \rho(T_n) \subseteq \rho(T_{n+1})$ Inmediato de **a**) y **b**)

3). $\dot{\forall}\ n \in \mathbb{N}$ (T_n es finítamente satisfacible). Inmediato del **Lema**$_{\mathbf{1.ii)}}$ y del **Lema**$_{\mathbf{2.ii)}}$.

Ahora, **definimos**

$$T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n.$$

Veamos que T es una Teoría de Henkin que extiende a Σ :

i). $\Sigma \subseteq T \subseteq \mathcal{L}^0_{\rho'}$ con $\rho' \supseteq \rho$:
Por un lado $\Sigma = T_0 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n = T$ y por otro
$\rho = \rho(\Sigma) = \rho(T_0) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \rho(T_n) = \rho(T).$
Tomar $\rho' = \rho(T)$.

ii). T es una Teoría de Henkin :

a). T es finítamente satisfacible:
Inmediato de **1**)., **3**). y de la **Proposición**$_{\mathbf{12}}$.

b). T es una f–teoría f–completa:

Sea $\sigma \in \mathcal{L}^0_{\rho'}$, puesto que $\rho' = \rho(T) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \rho(T_n)$, por **2.c**) tenemos que hay un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma \in \mathcal{L}^0_{\rho(T_{2n_0+1})}$. Ahora bien, por el **Lema**$_1$ y de la definición de T_{2n_0+1}, ésta es una f–teoría f–completa. Por la **Proposición**$_{\mathbf{10.2}}$, tenemos:

$$\sigma \in T_{2n_0+1} \quad \text{o bien} \quad \neg\sigma \in T_{2n_0+1}$$

en cualquier caso:

$$\sigma \in T \quad \text{o bien} \quad \neg\sigma \in T$$

Finalmente, por la **Proposición**$_{\mathbf{10.3}}$ y de **ii**).**a**)., tenemos lo que queríamos.

c). T es cerrada bajo testigos:

Supongamos que $\exists x\alpha(x) \in T$. De la definición de T y de **1**), tenemos que para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ se tiene que $\exists x\alpha(x) \in T_{2n_0+2}$.

Pero de la definición de T_{2n_0+2} y gracias al **Lema**$_2$, se tiene que T_{2n_0+2} es cerrada bajo testigos. Por tanto, $\exists x \alpha(x)$ tiene un testigo en T_{2n_0+2}.

Por lo que T, que extiende a T_{2n_0+2}, resulta ser cerrada bajo testigos. †