

Pasemos ahora al último resultado previo a la prueba del Metateorema de Compacidad.

Lema₄. Toda Teoría de Henkin tiene modelo.

Prueba. Sea $T \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$ una Teoría de Henkin, veamos que es satisfacible. Para construir un modelo para T , necesitamos dar un par de definiciones y algunas propiedades. Sea

$$A' = \left\{ \tau \in TRM_\rho / \tau \text{ es cerrado} \right\}$$

Afirmación₁. $A' \neq \emptyset$.

Prueba: Puesto que T es f -teoría, se tiene que $UV_\rho \subseteq T$. En particular, tenemos que $\exists v_{28}(v_{28} \approx v_{28}) \in UV_\rho \subseteq T$. Ahora bien, como T es cerrada bajo testigos, hay una constante $c \in \mathcal{C}_\rho$ tal, que $(c \approx c) \in T$. Así, $c \in A'$. †

Definimos una relación binaria, \equiv , sobre A' , como sigue: Si $\tau, \tau' \in A'$ entonces

$$\tau \equiv \tau' \quad \text{syss} \quad (\tau \approx \tau') \in T$$

Afirmación₂. La relación \equiv , es de equivalencia sobre A' .

Prueba: Es directa, usando que $UV_\rho \subseteq T$ y de que T es cerrado bajo consecuencias finitas. †

Notación: 1) Si $\tau \in A'$, escribiremos $\tilde{\tau} = \left\{ \tau' \in A' / \tau' \equiv \tau \right\}$

$$2) \quad A = A' / \equiv = \left\{ \tilde{\tau} / \tau \in A' \right\}$$

En cada clase de equivalencia, hay una constante.

Afirmación₃. Para cada $\tau \in A'$, hay una $c \in \mathcal{C}_\rho$ tal que $\tilde{c} = \tilde{\tau}$.

Prueba. Sea pues $\tau \in A'$. Tenemos que $\exists v_0(v_0 \approx \tau) \in UV_\rho \subseteq T$. Ahora, como T es cerrada bajo testigos, hay una $c \in \mathcal{C}_\rho$ tal que $(c \approx \tau) \in T$ es decir que $c \equiv \tau$ y por tanto $\tilde{c} = \tilde{\tau}$. †

Afirmación₄. Sean $f \in \mathcal{F}_\rho^n$ y $P \in \mathcal{P}_\rho^n$ y sean $\tau_1, \tau'_1, \dots, \tau_n, \tau'_n \in A'$. Así:

Si $\tau_1 \equiv \tau'_1, \dots, \tau_n \equiv \tau'_n$, entonces

$$\bullet) \quad f(\tau_1, \dots, \tau_n) \equiv f(\tau'_1, \dots, \tau'_n). \quad \text{y}$$

$$\bullet) \quad P(\tau_1, \dots, \tau_n) \in T \text{ syss } P(\tau'_1, \dots, \tau'_n) \in T.$$

Prueba: Es directa, usando las definiciones y las propiedades de T . †

Pasemos ahora a **definir** una estructura \mathfrak{A} , de tipo ρ , como sigue :

I). El Universo de \mathfrak{A} , es A .

- II). a) Si $c \in \mathcal{C}_\rho$, entonces $c^{\mathfrak{A}} = \tilde{c}$.
 b) Si $f \in \mathcal{F}_\rho^n$, considere la operación $f^{\mathfrak{A}} : A^n \rightarrow A$ dada por :
 si $\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_n \in A$, entonces $f^{\mathfrak{A}}(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_n) = \overline{f(\tau_1, \dots, \tau_n)}$
 c) Si $P \in \mathcal{P}_\rho^n$, considere la relación $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ dada por :
 si $\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_n \in A$, entonces $\langle \tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_n \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$ syss $P(\tau_1, \dots, \tau_n) \in T$.

Obsérvese que $A \neq \emptyset$ debido a la **Afirmación**₁. Y el hecho de que $f^{\mathfrak{A}}$ y $P^{\mathfrak{A}}$ estén bien definidas, es gracias a la **Afirmación**₄. Veremos más adelante que \mathfrak{A} satisface a T antes,

Afirmación₅. Para todo $\tau \in A'$, se tiene que $\tau^{\mathfrak{A}} = \tilde{\tau}$.

prueba. Se hará por inducción sobre la formación de ρ -términos :

- i) Sea $c \in \mathcal{C}_\rho$, Por II.a), se tiene que $c^{\mathfrak{A}} = \tilde{c}$.
 ii) Sea $f \in \mathcal{F}_\rho^n$, y sean $\tau_1, \dots, \tau_n \in A'$.

Supongamos inductivamente que $\tau_1^{\mathfrak{A}} = \tilde{\tau}_1, \dots, \tau_n^{\mathfrak{A}} = \tilde{\tau}_n$. Así

$$\begin{aligned} \left(f(\tau_1, \dots, \tau_n) \right)^{\mathfrak{A}} &= f^{\mathfrak{A}}(\tau_1^{\mathfrak{A}}, \dots, \tau_n^{\mathfrak{A}}) && \text{Interpretación de } \rho\text{-término (cerrado)} \\ &= f^{\mathfrak{A}}(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_n) && \text{Hipótesis Inductiva y } f^{\mathfrak{A}} \text{ es función} \\ &= \overline{f(\tau_1, \dots, \tau_n)} && \text{Definición II.b)} \quad \dagger \end{aligned}$$

Pasemos finalmente a ver que $\mathfrak{A} \models T$. Probaremos algo más fuerte:

Afirmación₆. Para cualquier $\sigma \in \mathcal{L}_\rho^0$ se tiene que:

$$\sigma \in T \quad \text{syss} \quad \mathfrak{A} \models \sigma \quad \dots \quad \star$$

Prueba. Esta la haremos por *Inducción Modificada* sobre el número de símbolos que aparecen en un ρ -enunciado σ , $|\mathcal{L}_\rho(\sigma)|$:

Sea pues $\sigma \in \mathcal{L}_\rho^0$ tal, que $|\mathcal{L}_\rho(\sigma)| = m$ y supongamos inductivamente que para cualquier $\sigma' \in \mathcal{L}_\rho^0$, si $|\mathcal{L}_\rho(\sigma')| < m$, entonces σ' tiene la propiedad \star . Tenemos 5 casos posibles:

CASO₁. $\sigma \rightleftharpoons (\tau_1 \approx \tau_2)$, donde $\tau_1, \tau_2 \in A'$:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{A} \models (\tau_1 \approx \tau_2) & \text{syss} & \tau_1^{\mathfrak{A}} = \tau_2^{\mathfrak{A}} & \text{Tarski} \\ & \text{syss} & \tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2 & \text{Afirmación}_5 \\ & \text{syss} & \tau_1 \equiv \tau_2 & \text{propiedades de } \equiv \\ & \text{syss} & (\tau_1 \approx \tau_2) \in T & \text{definición de } \equiv \end{array}$$

CASO₂. $\sigma \rightleftharpoons P(\tau_1, \dots, \tau_n)$, donde $P \in \mathcal{P}_\rho^n$ y $\tau_1, \dots, \tau_n \in A'$:

$\mathfrak{A} \models P(\tau_1, \dots, \tau_n)$	syss	$\langle \tau_1^{\mathfrak{A}}, \dots, \tau_n^{\mathfrak{A}} \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$	Tarski
	syss	$\langle \tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_n \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$	Afirmación₅
	syss	$P(\tau_1, \dots, \tau_n) \in T$	por II.c)

CASO₃. $\sigma \Leftrightarrow (\neg\sigma')$, donde $\sigma' \in \mathcal{L}_\rho^0$:

$\mathfrak{A} \models (\neg\sigma')$	syss	$\mathfrak{A} \not\models \sigma'$	$\sigma' \in \mathcal{L}_\rho^0$
	syss	$\sigma' \notin T$	por \mathfrak{A} , pues $ \mathcal{L}_\rho(\sigma') < m$
	syss	$(\neg\sigma') \in T$	por (*)

(*) :

- \Rightarrow] Si $\sigma' \notin T$ por la f -completud de la f -teoría T , tenemos que $(\neg\sigma') \in T$
- \Leftarrow] Si $(\neg\sigma') \in T$ entonces $\sigma' \notin T$, pues en caso contrario $\{\sigma', \neg\sigma'\}$ sería un subconjunto finito de T no-satisfacible, contradiciendo que T es finítamente satisfacible.

CASO₄. $\sigma \Leftrightarrow (\sigma_1 \vee \sigma_2)$, donde $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{L}_\rho^0$:

$\mathfrak{A} \models (\sigma_1 \vee \sigma_2)$	syss	$\mathfrak{A} \models \sigma_1$ o $\mathfrak{A} \models \sigma_2$	Tarski
	syss	$\sigma_1 \in T$ o $\sigma_2 \in T$	por \mathfrak{A} , pues $ \mathcal{L}_\rho(\sigma_1) , \mathcal{L}_\rho(\sigma_2) < m$
	syss	$(\sigma_1 \vee \sigma_2) \in T$	por (**)

(**):

- \Rightarrow] Sup. s.p.g. que $\sigma_1 \in T$. Como $\sigma_1 \models (\sigma_1 \vee \sigma_2)$ y T es f -teoría tenemos que $(\sigma_1 \vee \sigma_2) \in T$
- \Leftarrow] Supongamos que $(\sigma_1 \vee \sigma_2) \in T$. Como $(\sigma_1 \vee \sigma_2) \models \sigma_1$ o $(\sigma_1 \vee \sigma_2) \models \sigma_2$ y de que T es f -teoría tenemos que $\sigma_1 \in T$ o $\sigma_2 \in T$.

CASO₅. $\sigma \Leftrightarrow (\exists x\alpha(x))$, donde $\alpha \in \mathcal{L}_\rho^1$:

$\mathfrak{A} \models \exists x\alpha(x)$	syss	hay $\tilde{\tau} \in A$, $\mathfrak{A} \models \alpha(x)[\tilde{\tau}]$	Tarski
	syss	hay $c \in \mathcal{C}_\rho$, $\mathfrak{A} \models \alpha(x)[\tilde{c}]$	Afirmación₃
	syss	hay $c \in \mathcal{C}_\rho$, $\mathfrak{A} \models \alpha(x)[c^{\mathfrak{A}}]$	Afirmación₅
	syss	hay $c \in \mathcal{C}_\rho$, $\mathfrak{A} \models \alpha(x/c)$	Lema de Sustitución
	syss	hay $c \in \mathcal{C}_\rho$, $\alpha(x/c) \in T$	Por \mathfrak{A} , pues $ \mathcal{L}_\rho(\alpha(x/c)) < m$
	syss	$(\exists x\alpha(x)) \in T$	(***)

(***) :

⇐] Por ser T cerrada bajo testigos.

⇒] Si $c \in \mathcal{C}_\rho$, y $\alpha(x/c) \in T$, entonces $(\exists x\alpha) \in T$,

pues $\alpha(x/c) \models (\exists x\alpha(x))$ y T es f -teoría.

†

De este resultado desprendemos que $\mathfrak{A} \models T$.

Así, toda teoría de Henkin es satisficible o si se prefiere toda teoría de Henkin tiene un Modelo.