METATEOREMA DE COMPACIDAD

Todo conjunto de ρ–enunciados finítamente satisfacible, es satisfacible.

Prueba. Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$ finítamente satisfacible. Por el **Lema**$_3$, Σ se puede extender a una ρ'–teoría de Henkin, digamos T. Así, tenemos que $\Sigma \subseteq T \subseteq \mathcal{L}_{\rho'}^0$ con $\rho \subseteq \rho'$. Ahora bien, por el **Lema**$_4$, T tiene un ρ'–modelo, digamos $\mathfrak{A}$, y por tanto de Σ. Finalmente, la restricción de $\mathfrak{A}$ a ρ, es decir $\mathfrak{A} \restriction \rho$, es un ρ–modelo de Σ y por tanto Σ es satisfacible, en $\mathcal{L}_\rho^0$. †

Así, teniendo en la mano al **MTC**, las nociones de satisfacibilidad y finitamente satisfacible coinciden. No solo éstas, también la de consecuencia y consecuencia finita. Antes, necesitamos un resultado previo, cuya prueba se deja al lector.

Lema$_1$. Sea $\Sigma \cup \{\sigma\} \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$. Así,

1. $\Sigma \models_f \sigma$ syss $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ no es finitamente satisfacible. O,

2. $\Sigma \not\models_f \sigma$ syss $\Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ es finitamente satisfacible.

Proposición$_2$. Sea $\Sigma \cup \{\sigma\} \subseteq \mathcal{L}_\rho^0$.

Si $\Sigma \models \sigma$, entonces $\Sigma \models_f \sigma$.

Prueba. Esta la haremos por contrapositiva. Supongamos pues, que $\Sigma \not\models_f \sigma$.
El **Lema$_{1.2}$** nos garantiza que,

$$\Sigma \cup \{\neg\sigma\} \text{ es finitamente satisfacible}$$

Gracias al **MTC**, obtenemos

$$\Sigma \cup \{\neg\sigma\} \text{ es satisfacible}$$

Finalmente, por la **Proposición$_8$**,

$$\Sigma \not\models \sigma$$

†

Como vemos, este último resultado es una consecuencia inmediata del Metateorema de Compacidad, en realidad son equivalentes.

Proposición$_3$. Si consecuencia lógica y consecuencia finita coinciden, se tiene el **M**eta**T**eorema de **C**ompacidad.
Prueba: **TAREA**.

Como un corolario a todo esto es que bajo la suposición del **MTC**, también coinciden las otras nociones, la de teoría y f–teoría, asi como completud y

f–completud.

Finalmente, hay una estrecha relación entre el **MTC** y el Metateorema de Correctud–Completud de un Cálculo de Predicados. Con lo que tenemos a la mano, lo podemos enunciar de la siguiente manera.

Proposición$_4$. Bajo la suposición de que se tiene un Cálculo de Predicados para la lógica de primer órden, con las propiedades de ser Correcto, Completo —respecto a las Universalmente Válidas— y también tiene un Metateorema de la Deducción, entonces, son equivalentes

El Metateorema de Compacidad y el
Metateorema de Correctud y Completud Extendida

Prueba: **TAREA**. †

Un último comentario.

Para la prueba del **MTC** hemos usado el **A**xioma de **E**lección (**AE**). Para ser precisos, en la prueba del **Lema$_1$** y usamos o bien el **T**eorema de **B**uena **O**rdenación (para bien ordenar el conjunto de ρ–enunciados, $\mathcal{L}^0_\rho$) o bien el **L**ema de **Z**orn.

Sin embargo existen otras pruebas basadas en principios más débiles que el **AE**, por ejemplo, el **T**eorema del **U**ltrafiltro. De hecho, estos dos son equivalentes entre sí y resultan ser, al igual que el **AE**, independientes del resto de los axiomas de la teoría de conjuntos, la de Zermelo-Fraenkel (**ZF**).

†