Meta-Teoremas de puente entre semántica y sintaxis.

Fernando Javier Nuñez Rosales

19 de noviembre de 2014

Ya tenemos probado este resultado: **Meta-Teorema** 0. Sea $\Gamma\cup \subseteq \Phi(\mathbb{B})$ finito y $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$. $\Gamma \models \alpha$ syss $\Gamma \vdash \alpha$.

Con el procederemos a establecer más meta-teoremas que nos lleven de conceptos relacionados con la sintaxis a conceptos de la semántica, pero antes probaremos un lema para facilitar estos.

Lema: Sea $\Sigma \subseteq \Phi(\mathbb{B})$. $SAT(\Sigma)$ syss no hay $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$ tal que $\Sigma \models \alpha$ y $\Sigma \models \neg\alpha$.

Prueba: $\Rightarrow\big]$ Supongamos lo contrario, así $SAT(\Sigma)$ y hay $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$ tal que $\Sigma \models \alpha$ y $\Sigma \models \neg\alpha$. Como $SAT(\Sigma)$, por definición hay $v \in {}^{\mathbb{B}}2$ tal que $v^*(\gamma) = 1$ para toda $\gamma \in \Sigma$, pero también sabemos que $\Sigma \models \alpha$ y $\Sigma \models \neg\alpha$, por lo tanto

$$v^*(\alpha) = v^*(\neg\alpha)$$

Lo cual es una contradicción.

$\Leftarrow\big]$ Si suponemos que Σ es insatisfacible, tenemos que cualquier fórmula es consecuencia lógica de el. Con lo que queda probado lo que buscabamos.

†

Meta-Teorema 1. Sean $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq \Phi(\mathbb{B})$. Así los siguientes enunciados son equivalentes:

1. Si $\Sigma \models \varphi$, entonces $\Sigma \vdash \varphi$ y
2. Si Σ es (sintácticamente) consistente, entonces Σ es satisfacible.

Prueba: $1 \Rightarrow 2\big]$ Supongamos que Σ es insatisfacible, en virtud del Lema tenemos que hay $\varphi \in \Phi(\mathbb{B})$ tal que $\Sigma \models \varphi$ y $\Sigma \models \neg\varphi$, aplicando 1 tenemos que $\Sigma \vdash \varphi$ y $\Sigma \vdash \neg\varphi$, por lo tanto Σ es inconsistente.

$2 \Rightarrow 1\big]$ Supongamos que $\Sigma \nvdash \varphi$, así tenemos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es consistente, por 2 tenemos que que $SAT(\Sigma \cup \{\neg\varphi\})$, de lo cual es inmediato que $\Sigma \nvDash \varphi$.

†

Lo probado anteriormente es la equivalencia de dos resultados, todavia no tenemos alguno de los dos, cada enunciado es un puente, ya que sus recíprocos pueden ser probados sin mayor problema (ya lo hemos hecho en clase), los cuales parecen, cada uno por separado, no ser triviales, ya que en la deductivilidad es un manejo meramente símbolico y la consecuencia lógica es completamente dependiente de los valores de verdad.

Ahora si usaremos el resultado que enunciamos al inicio de estas notas para probar un resultado aun más sorprendente, el cual enunciamos en seguida.

Meta-Teorema 2. Sea $\Gamma \subseteq \Phi(\mathbb{B})$. Así, $FINSAT(\Gamma)$ syss Γ es consistente.
Prueba: $1 \Rightarrow 2]$ Supongamos que Γ es inconsistente, así hay $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$ tal que $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \neg\alpha$, de lo cual sabemos que hay $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ finitos con la propiedad de $\Gamma_1 \vdash \alpha$ y $\Gamma_2 \vdash \neg\alpha$, por lo tanto $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es finito, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \alpha$ y $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \neg\alpha$ por monotonía de la deducción, en virtud del Meta-Teorema 0 tenemos que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \models \neg\alpha$ y $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \models \alpha$, por el Lema $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfacible, obteniendo que Γ no es finitamente satisfacible.

$2 \Rightarrow 1]$ Sea $\Sigma \subseteq \Gamma$ finito, probaremos que es satisfacible. Supongamos que no lo es, por lo que hay $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$ tal que $\Sigma \models \alpha$ y $\Sigma \models \neg\alpha$ debido al Lema, por el Meta-Teorema 0 tenemos que, al ser Σ finito, $\Sigma \vdash \neg\alpha$ y $\Sigma \vdash \alpha$, por monotonia de la deducción tenemos que $\Gamma \vdash \neg\alpha$ y $\Gamma \vdash \alpha$, así Γ es inconsistente.

†

Los resultados anteriores son importantes ya que con El Profesor probaran:

Meta-Teorema de Compacidad (Semántico): Para todo $\Sigma \subseteq \Phi(\mathbb{B})$. Si $FINSAT(\Sigma)$, entonces $SAT(\Sigma)$.

El reciproco de este teorema es muy fácil de probar y no alude más que a la definición.

Lo importante es que con el estarán probando tres Meta-Teoremas a la ves:

- El propio Meta-Teorema de Compacidad.
- El inciso 2 del Meta-Teorema 1, ya que si un conjunto de fórmulas es consistente, por el Meta-Teorema 2 el conjunto es finitamente satisfacible y por compacidad es satisfacible.
- El Meta-Teorema de Correctud-Completud Extendida para el calculo proposicional, el cual es el inciso 1 del Meta-Teorema 1, con su reciproco, pues ya tenemos el Meta-Teorema 1 y por el punto anterior tenemos el inciso 2 del Meta-Teorema 2.