

Lógica Matemática I

Tarea-Examen II

28 de octubre de 2014

1. Escribe en primer orden los enunciados:

- Existen exactamente n elementos
- Existen dos maximales
- x es la bola de radio y con centro en z (pueden usar las fórmulas que definimos al escribir continuidad en primer orden; ser función, ser métrica...)

2. Traduce el siguientes enunciados y di si $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ (Por favor usa a todo detalle la definición de verdad del Santo de la Verdad Tarski).

a) $\forall x \forall y \exists z \forall w [R(w, z) \leftrightarrow ((w = x) \vee (w = y))]$

b) $\exists x \forall w [\neg R(w, x)]$

c) $\forall x \forall y [\forall w (R(w, x) \leftrightarrow R(w, y)) \rightarrow x = y]$

3. Muestra o da contraejemplo

- Si $\alpha \models \beta \vee \gamma$, entonces $\alpha \models \beta$ o $\alpha \models \gamma$.
- Si $\models \alpha$, entonces para toda β se tiene que $\beta \models \alpha$.
- Si $\alpha \models \beta$ y $\gamma \models \beta$, entonces $\alpha \& \gamma \models \beta$.
- Si $\alpha \models \beta$ y $\gamma \models \beta$, entonces $\alpha \vee \gamma \models \beta$.
- Si $\alpha \vee \beta \models \gamma$, entonces $\alpha \models \gamma$ y $\beta \models \gamma$.

4. Prueba la Proposición 3 de las notas de EL Profesor, con el titulo: Bloques-A.

5. Recordemos que una ocurrencia de una variable x es acotada en una fórmula α si y sólo si dicha ocurrencia es la variable de un cuantificador " $\forall x$ " (o " $\exists x$ ") en β , o dicha ocurrencia está en el alcance de un cuantificador " $\forall x$ " (o " $\exists x$ "). En otro caso, se dice que la ocurrencia es libre. Sin embargo es posible dar una definición recursiva de que una variable sea libre en una fórmula:

Definición: Se dice que la ocurrencia de una variable x es libre' en α si:

- α es atómica y x ocurre en α
- Si $\alpha \Leftarrow (\neg\beta)$ y la ocurrencia de x en β es libre'
- Si $\alpha \Leftarrow (\beta \Rightarrow \gamma)$ y la ocurrencia de x en β es libre' o la ocurrencia de x en γ es libre'
- $\alpha \Leftarrow (\forall z\beta)$ y $z \neq x$ y la ocurrencia de x en β es libre'

Demuestre que las dos definiciones son equivalentes (i.e. la ocurrencia de una variable x es libre syss la ocurrencia de una variable x es libre').