Lógica Matemática I Tarea-Examen I

Prof. Rafael Rojas Barbachano Ayte. Estefania Riviello Ayte. Fernando Nuñez

5 de septiembre de 2014

1. Dado ρ un tipo de semejanza definimos de manera recursiva:
   - Para cada variable x_i, $sbte(x_i) = \emptyset$
   - Para cada símbolo de constante $c_i \in \rho$, $sbte(c_i) = \emptyset$
   - Si $\tau_1, \ldots, \tau_n \in TRM_\rho$ y $f \in \rho$ es un símbolo funcional de aridad n,

   $$sbte(f(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = \{\tau_1, \ldots, \tau_n\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} sbte(\tau_i)$$

   Pruebe que *sbte* le asigna a cada término un único conjunto de términos, es decir, que es una función.

2. Muestre que no hay fórmulas de longitud 2, 3 ni 6, pero que cualquier otra longitud es posible.

3. Suponga que α es una fórmula que no contiene el símbolo de la negación $\neg$. Muestre que la longitud de α (es decir, el número de símbolos en la sucesión) es impar.

4. Defina $long : \mathscr{L}_\rho \longrightarrow \mathbb{N}$, la función que a cada $\alpha \in \mathscr{L}$, le asocia el número de símbolos que forma α.

5. Considere $SF_{\mathscr{L}} = \langle \mathscr{L}, \{R_i\}_{i \in I} \rangle$, sean $\Gamma, \Delta \subseteq \Phi$ y $\alpha \in \Phi$ entonces
   - Si $\Gamma \subseteq \Delta$ entonces $\Gamma^{\vdash} \subseteq \Delta^{\vdash}$;
   - $(\Gamma^{\vdash})^{\vdash} = \Gamma^{\vdash}$;
   - $\Phi^{\vdash} = \Phi$;
   - $\Gamma^{\vdash} \cup \Delta^{\vdash} \subseteq (\Gamma \cup \Delta)^{\vdash}$

6. Sean $\rho = \{f_1, f_2\} \cup \{c\}$ un tipo de semejanza con $f_1 \in \mathscr{F}_1$ y $f_2 \in \mathscr{F}_2$, $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}, \cdot, \_^{-1}, 1 \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Z}, +, -\_, 0 \rangle$ interpretaciones para ρ.
   - Asignaciones para $\mathfrak{A}$
     - $s_1(i) = \frac{1}{i+1}$,
     - $s_2(i) = \frac{i}{i+2}$,
     - $s_3(i) = \frac{i^2}{2}$
   - Asignaciones para $\mathfrak{B}$
     - $s_1(i) = i + 28$
     - $s_2(i) = i$
     - $s_3(i) = \begin{cases} i & \text{si } i = 2j \text{ para alguna } j \in \mathbb{N} \\ -i & \text{si } i = 2j+1 \text{ para alguna } j \in \mathbb{N} \end{cases}$

   Interpreta cada uno de los siguientes términos en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ con cada una de las asignaciones definidas arriba.
   - $\tau_1 \leftrightharpoons f_2(x_3, f_2(x_0, f_1(f_1(x_1))))$
   - $\tau_2 \leftrightharpoons f_1(f_2(f_1(f_1(x_2)), f_1(f_1(x_8))))$
   - $\tau_3 \leftrightharpoons f_2(f_1(f_2(x_{28}, f_1(c))), f_2(c, c))$
   - $\tau_4 \leftrightharpoons f_2(f_2(f_1(x_0), c), f_1(c))$

   Ya con las interpretaciones de los términos diga si las siguientes fórmulas atómicas son verdaderas en cada estructura con cada asignación: $\tau_1 \approx \tau_2$, $\tau_1 \approx \tau_3$ y $\tau_3 \approx \tau_4$