Cuantificadores

Ahora simbolizaremos expresiones cuantificadas por ejemplo del tipo:

1. Todos los S son P
2. Ningún S es P
3. Algunos S son P
4. Algunos S no son P
5. Hay uno y sólamente uno que, …
6. Hay almenos uno que, …
7. Para a lo más uno, …

Así pues necesitamos introducir nueva simbología. En lo que sigue, sean φ y ψ ρ–expresiones aceptadas como bien escritas, en nuestro Lenguaje Formal y sean x, y, z variables (estrictamente hablando, meta–variables).

I. Pasemos ahora a simbolizar expresiones del tipo:

"Todos los … , son …"

Símbolos: (_) , $\forall$
Nosotros: $\forall$

Nombre: *Cuantificador Universal*.

Sintaxis: $(\forall x\ \varphi)$
A φ se le llama el *Alcance del cuantificador* $\forall x$.

Lectura: La expresión "$(\forall x\ \varphi)$" debe leerse de cualquiera de las siguientes maneras:

1. Para toda x, φ.
2. Para cada x, φ.
3. Todos los x, φ.
4. Todos, φ.
5. Dada x, φ.
6. Cualquiera sea x, φ.

II. Pasemos ahora a simbolizar expresiones del tipo:

"Algunos … , son …"

Símbolo: $\exists$

Nombre: *Cuantificador Existencial*.

Sintaxis: $(\exists x\ \varphi)$

A φ se le llama el *Alcance del cuantificador* $\exists x$

Lectura: La expresión "$(\exists x\ \varphi)$" debe leerse de cualquiera de las siguientes maneras:

1. Existe un(a) x tal, que φ.
2. Hay una x tal, que φ.
3. Para una x se tiene que, φ.
4. Hay al menos una x tal, que φ.
5. Para al menos una x se tiene que φ.
6. Algunos, φ.

Semántica de los cuantificadores

Al dar una interpretación, las variables recorrerán sobre los elementos del universo de interpretación y siendo consecuentes con ello, las interpretaciones de "$\forall x$" y "$\exists x$" serán "para todo elemento del universo de interpretación" y "existe un elemento del universo de interpretación", respectivamente.

Ejemplos:

a). Para todo número real, ...

b). Hay un natural tal, que ...

c). Para cada función se tiene que ...

Ahora, si fuera el caso en que la variable x no aparece en φ ¿ qué ocurre con las expresiones $(\forall x\ \varphi)$ y $(\exists x\ \varphi)$? Resulta que al interpretarlas son sinónimos de φ, es decir, éstas no nos dicen nada sobre x.

Supongamos pues que, en φ aparece x y escribamos este hecho, por lo pronto, como $\varphi(x)$.

Al interpretar $\varphi(x)$ y no decir cómo se interpretará la variable x, ésta la podemos pensar como una propiedad para los elementos del universo de interpretación; a saber el conjunto de todos los x que cumplen con la propiedad $\varphi(x)$.

Sinonimia:

Supongamos que la variable x aparece en la expresión φ, es decir tenemos a $\varphi(x)$ y que en ella **no** aparece la variable y. Escribiremos $\varphi(y)$ para denotar a la nueva expresión que se obtiene al reemplazar, en φ, todas las ocurrencias de x por y. También supongamos que en la expresión ψ aparecen las variables x e y, para lo cual pondremos $\psi(x,y)$. Tenemos los siguientes sinónimos.

$$\begin{array}{rcl}
\left(\forall x\ \varphi(x)\right) & \text{sinónimo} & \left(\forall y\ \varphi(y)\right) \\
\left(\exists x\ \varphi(x)\right) & \text{sinónimo} & \left(\exists y\ \varphi(y)\right) \\
\left(\forall x\left(\forall y\ \psi(x,y)\right)\right) & \text{sinónimo} & \left(\forall y\left(\forall x\ \psi(x,y)\right)\right) \\
\left(\exists x\left(\exists y\ \psi(x,y)\right)\right) & \text{sinónimo} & \left(\exists y\left(\exists x\ \psi(x,y)\right)\right)
\end{array}$$

Observación: *No son sinónimos:*

$$\left(\forall x\ \left(\exists y\ \psi(x,y)\right)\right) \text{ y } \left(\exists y\ \left(\forall x\ \psi(x,y)\right)\right)$$

Lo más que podemos afirmar, bajo interpretación, es:

Si $\left(\exists y\ \left(\forall x\ \psi(x,y)\right)\right)$, *entonces* $\left(\forall x\ \left(\exists y\ \psi(x,y)\right)\right)$.

Otros Sinónimos:

$$\begin{array}{rcll}
\left(\neg\left(\forall x\ \varphi(x)\right)\right) & \text{sinónimo} & \left(\exists x\ (\neg\varphi(x))\right) & \\
\left(\neg\left(\exists x\ \varphi(x)\right)\right) & \text{sinónimo} & \left(\forall x\ (\neg\varphi(x))\right) & \text{(“ninguno”)} \\
\left(\neg\left(\forall x\ (\neg\varphi(x))\right)\right) & \text{sinónimo} & \left(\exists x\ \varphi(x)\right) & \\
\left(\neg\left(\exists x\ (\neg\varphi(x))\right)\right) & \text{sinónimo} & \left(\forall x\ \varphi(x)\right) &
\end{array}$$

Pasemos ahora a simbolizar algunas expresiones del español. (**Clasificación Aristotélica de los Juicios**)

Por lo pronto, sean S y P ρ–expresiones aceptadas como bien escritas, en nuestro Lenguaje Formal, en las cuales aparece la variable x.

(**A** : **Universal Afirmativo**) **Todos los** S **son** P :

$$\left(\forall x \left(S(x) \ \rightarrow \ P(x)\right)\right)$$

(**I** : **Particular Afirmativo**) **Algunos** S **son** P :

$$\left(\exists x \left(S(x) \ \& \ P(x)\right)\right)$$

En cambio:

$$\left(\forall x \left(S(x) \ \& \ P(x)\right)\right)$$

dice: *Todos, son* S *y son* P. Y

$$\left(\exists x \left(S(x) \ \rightarrow \ P(x)\right)\right)$$

dice: *Hay alguien que en el caso en que tuviera la propiedad* S, *tendría forzósamente la propiedad* P.

(**O** : **Particular Negativo**) **Algunos** S **no son** P :

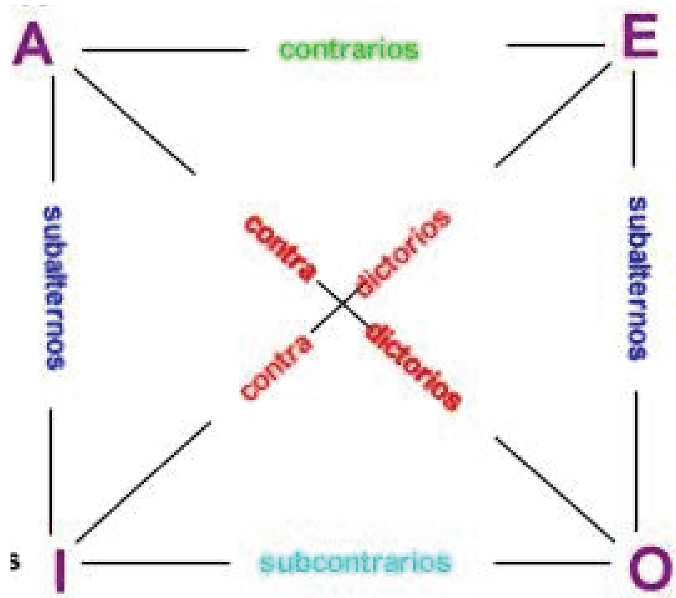
$$\left(\exists x \left(S(x) \ \& \ (\neg P(x))\right)\right)$$

(**E** : **Universal Negativo**) **Ningún** S **es** P :

$$\left(\forall x \left(S(x) \ \rightarrow \ (\neg P(x))\right)\right)$$

NOTA: La asignación de estas letras para representar las formas del juicio categórico es posterior a Aristóteles y procede de las palabras latinas:
*"**A**f**I**rmo"* y *"n**E**g**O**"*.

En la Lógica Aristotélica, entre los tipos de juicios se establecen distintas relaciones de oposición: Contrarios, Contradictorios, Subcontrarios y Subalternos:



Obsérvese que:

$\neg A \rightleftharpoons O$: La negación de un Universal Afirmativo es un Particular Negativo

$$\left(\neg\left(\forall x\left(S(x) \rightarrow P(x)\right)\right)\right) \rightleftharpoons \left(\exists x\, \neg\left(S(x) \rightarrow P(x)\right)\right)$$
$$\rightleftharpoons \left(\exists x\left(S(x)\ \&\ (\neg P(x))\right)\right)$$

$\neg O \rightleftharpoons A$: La negación de un Particular Negativo es un Universal Afirmativo

$$\left(\neg\left(\exists x\left(S(x)\ \&\ (\neg P(x))\right)\right)\right) \rightleftharpoons \left(\forall x\left((\neg S(x)) \vee P(x)\right)\right)$$
$$\rightleftharpoons \left(\forall x\left(S(x) \rightarrow P(x)\right)\right)$$

$\neg I \rightleftharpoons E.$ La negación de un Particular Afirmativo es un Universal Negativo

$$\left(\neg\left(\exists x\left(S(x)\ \&\ P(x)\right)\right)\right) \rightleftharpoons \left(\forall x\left((\neg S(x)) \vee (\neg P(x))\right)\right)$$
$$\rightleftharpoons \left(\forall x\left(S(x) \rightarrow (\neg P(x))\right)\right)$$

$\neg E \rightleftharpoons I.$ La negación de un Universal Negativo es un Particular Afirmativo

$$\left(\neg\left(\forall x\left(S(x) \rightarrow (\neg P(x))\right)\right)\right) \rightleftharpoons \left(\exists x\left(\neg\left(S(x) \rightarrow (\neg P(x))\right)\right)\right)$$
$$\rightleftharpoons \left(\exists x\left(S(x)\ \&\ P(x)\right)\right)$$

Para finalizar esta sección, como un ejemplo más, simbolizaremos una expresión usada con mucha frecuencia:

"**Hay** un **único** individo tal, que ..."

Con lo que tenemos hasta ahora es posible dar una simbolización: Sea φ una expresión aceptada en la cual aparece la variable x y no aparecen las variables y y z. Así, la expresión: hay un único individo tal, que cumple la propiedad φ, que comunmente se denota por $\exists! x\varphi(x)$ lo podemos simbolizar de almenos dos maneras, obviamente sinónimas, como sigue:

$$
\begin{aligned}
(\exists! x\varphi(x)) \;&\rightleftharpoons\; \Big(\exists x\Big(\varphi(x)\;\&\;\Big(\forall y\Big(\varphi(y)\;\rightarrow\;(x\approx y)\Big)\Big)\Big)\Big) \\
&\rightleftharpoons\; \Big((\exists x\varphi(x))\;\&\;\Big(\forall y\Big(\forall z\Big(\varphi(y)\;\&\;\varphi(z)\;\rightarrow\;(y\approx z)\Big)\Big)\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

Obsérvese que la segunda simbolización la podemos leer en dos partes, las que están separadas por la conjunción, la primera afirma que hay *al menos un individuo* que cumple la propiedad φ y la segunda afirma que *a lo más un individuo* la cumple.