

Ahora pasemos a dar la definición rigurosa de un lenguaje Formal, adecuado para “hablar” de las estructuras elementales.

En lo que sigue, fijemos un tipo de semejanza, digamos ρ .

$$\rho = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{P}_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{F}_n \right) \cup \mathcal{C}$$

Definición₁. Un *Lenguaje (Formal de 1er. Orden) de Tipo ρ* , en breve un ρ -Lenguaje, \mathcal{L}_ρ , es un conjunto de símbolos de la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\rho &= \rho && \text{(No-Lógicos)} \\ &\cup \{v_n / n \in \mathbb{N}\} && \text{(Variables)} \\ &\cup \{ \approx \} && \text{(Igualdad)} \\ &\cup \{ \neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \} && \text{(Conectivos)} \\ &\cup \{ \forall, \exists \} && \text{(Cuantificadores)} \\ &\cup \{), (, ' \} && \text{(Auxiliares o de Puntuación)} \end{aligned}$$

Con la única condición de que un símbolo **no** es una sucesión finita de otros símbolos.

Recordemos que tenemos la notación,

$$VAR = \{v_n / n \in \mathbb{N}\}$$

Definición₂. e es una *Expresión de Tipo ρ* o una ρ -Expresión si e es una sucesión finita de símbolos de \mathcal{L}_ρ .

$$\begin{aligned} \text{Notación: } EXP_\rho &= \{e / e \text{ es una } \rho\text{-expresión}\} \\ &= \{e / e \text{ es una sucesión finita de símbolos de } \mathcal{L}_\rho\} \\ &= \{e / \text{hay un } n \in \mathbb{N} \text{ tal, que } e : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathcal{L}_\rho\} \end{aligned}$$

Definición₂. TRM_ρ es el \subseteq -menor conjunto de ρ -expresiones que:

I) Contiene a las variables y a las constantes:

$$VAR \cup \mathcal{C} \subseteq TRM_\rho \subseteq EXP_\rho$$

II) Es cerrado bajo la aplicación de letras funcionales:

Si $F \in \mathcal{F}_n$ y $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in TRM_\rho$, entonces

$$F(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \in TRM_\rho$$

Notación: A los elementos de TRM_ρ se les llaman *Términos de tipo ρ* o bien, ρ -*Términos*.

Definición₃. FRM_ρ es el \subseteq -menor conjunto de ρ -expresiones que:

I) Contiene a todas las ρ -atómicas:

Si $P \in \mathcal{P}_n$ y $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in TRM_\rho$, entonces

$$(\tau_1 \approx \tau_2) \in FRM_\rho \quad \text{y} \quad P(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \in FRM_\rho$$

II) Es cerrado bajo conectivas y cuantificadores:

a) Si $\alpha, \beta \in FRM_\rho$, entonces

$$(\neg\alpha), (\alpha \& \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta) \in FRM_\rho$$

b) $\alpha \in FRM_\rho$ y $x \in VAR$, entonces

$$(\forall x \alpha), (\exists x \alpha) \in FRM_\rho$$

Notación: A los elementos de FRM_ρ les llamaremos *Fórmulas (Bien Formadas) de tipo ρ* o ρ -*Fórmulas*.

Ejemplos: ...

Variables Libres y Acotadas

La forma cotidiana –por supuesto, en matemáticas– de usar las variables, envuelve dos distintas maneras. Veamos tres ejemplos:

Ejemplos:

I. Las integrales, en el plano real (\mathbb{R}^2) :

$$1. \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

$$a. \int_1^y \frac{1}{t} dt$$

$$b. \int_1^x \frac{1}{s} ds$$

Dicen lo mismo: **1.** y **b.**

Dicen cosas distintas: **1.** y **a.**

II. Las sumatorias, en los enteros (\mathbb{Z}) :

$$2. \sum_{i=i}^n a_i$$

$$c. \sum_{j=1}^n a_j$$

$$d. \sum_{i=1}^m a_i$$

Dicen lo mismo: **2.** y **c.**

Dicen cosas distintas: **2.** y **d.**

III. Los polinomios con coeficientes en los reales (\mathbb{R}) :

$$3. ax^2 + bx + c$$

$$e. ay^2 + by + c$$

$$f. a'x^2 + b'x + c'$$

Dicen lo mismo: **3.** y **e.**

Dicen cosas distintas: **3.** y **f.**

Hay pues, dos maneras distintas de usar una variable. Unas se llaman *Acotadas* y las otras *Libres*. Tratemos de entresacar algunas de sus propiedades:

Variable Acotada: Variable de “adveras”, una verdadera variable; puede tomar todos los valores –del dominio de variabilidad– pero ninguno en particular.

Variable Libre: Variable de “ule”, “aparente”, puede ser cualquier cosa –elemento del dominio de variabilidad–, pero uno solo, inamovible durante el discurso.

Variable Acotada: Si se cambia la variable, por otra, *no* cambia el significado de la

expresión.

Variable Libre: Si se cambia la variable, por otra, cambia el significado de la expresión.

En los ejemplos anteriores las variables son,

- Acotadas: En **1.**, t . En **2.**, i . En **3.** x .
- Libres: En **1.**, x . En **2.**, n . En **3.**, a, b y c .

Pasemos ahora a dar una definición formal de lo que significa que una ocurrencia de una variable, en una fórmula, sea acotada o libre.

De ahora en adelante, sea ρ un tipo de semejanza y \mathcal{L}_ρ un lenguaje de tipo ρ .

Recordemos la noción de alcance de un cuantificador:

En la ρ -fórmula, $(\forall x\alpha)$ (o en $(\exists x\alpha)$) a “ α ” se le llama *el alcance* del cuantificador “ $\forall x$ ” (o “ $\exists x$ ”). Dicho de otra manera, el *alcance* del cuantificador “ $\forall x$ ” (o “ $\exists x$ ”) es la fórmula inmediatamente a su derecha. Obsérvese que la variable x , puede no ocurrir en α .

Definición₁. Sea x una variable que ocurre en la fórmula β . *Una ocurrencia de x en β , es Acotada en β* si dicha ocurrencia de x , es la variable de un cuantificador “ $\forall x$ ” (o “ $\exists x$ ”) en β , o está en el alcance de algún cuantificador “ $\forall x$ ” (o “ $\exists x$ ”). En caso contrario, se dirá que dicha ocurrencia es *Libre*.

Ejemplos: Sea $\rho = \{P\} \cup \{f\} \cup \{c\}$, donde $P \in \mathcal{P}_2$, $f \in \mathcal{F}_1$ y $c \in \mathcal{C}$. Y Consideremos las siguientes ρ -fórmulas:

1. $P(v_0, v_1)$
2. $(\exists v_2 P(v_0, v_1))$
3. $(\forall v_0 P(v_0, v_1))$
4. $((\exists v_0 P(v_0, v_1)) \rightarrow (f(v_0) \approx c))$
5. $(\forall v_0 (P(v_0, v_1) \rightarrow (\forall v_1 P(f(v_0), v_1))))$

En **1.** y en **2.** las únicas ocurrencias de v_0 y de v_1 son libres y la única ocurrencia de v_2 , es acotada en **2.** En **3.**, todas las ocurrencias de v_0 son acotadas y la única de v_1 es libre. En **4.**, las primeras dos ocurrencias de v_0 son acotadas y la última es libre; la única de v_1 es libre. En **5.**, todas las ocurrencias de v_0 (a saber 3) son acotadas, la primera de v_1 es libre y las otras dos, son acotadas.

Definición₂. Sea $\sigma \in FRM_\rho$. Diremos que σ es un *Enunciado de Tipo ρ* , en breve, ρ -*Enunciado* si en σ todas las ocurrencias de sus variables son acotadas.

Notación: $\mathcal{L}_\rho^0 = \left\{ \sigma \in FRM_\rho \mid \sigma \text{ es un } \rho\text{-enunciado} \right\}$.