LÓGICA de los CONECTIVOS

(LÓGICA PROPOSICIONAL)

Sea $\rho = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathcal{P}_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathcal{F}_n\right) \cup \mathcal{C}$ un tipo de semejanza.

Tenemos un resultado, que es intuitivamente cierto, sin embargo hay que establecerlo y habría que probarlo, aquí solamente lo enunciamos.

Proposición$_0$. (**Metateorema de Lectura Única para** FRM_ρ).

Una ρ–expresión e, $e \in EXP_\rho$, es una ρ–fórmula, $e \in FRM_\rho$ syss una y solo una de las siguientes condiciones se dá:

1. Hay únicos $\tau_1, \tau_2 \in TRM_\rho$ tales que $(\tau_1 \approx \tau_2) = e$, o

2. Hay únicos $P \in \mathcal{P}_n$ y $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in TRM_\rho$, tales que $e = P(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, o

3. Hay únicos $\alpha \in FRM_\rho$, tal que $e = (\neg\alpha)$, o

4. Hay únicos $\alpha, \beta \in FRM_\rho$, tales que $e = (\alpha \,\&\, \beta)$, o

5. Hay únicos $\alpha, \beta \in FRM_\rho$, tales que $e = (\alpha \vee \beta)$, o

6. Hay únicos $\alpha, \beta \in FRM_\rho$, tales que $e = (\alpha \rightarrow \beta)$, o

7. Hay únicos $\alpha, \beta \in FRM_\rho$, tales que $e = (\alpha \leftrightarrow \beta)$, o

8. Hay únicos $\alpha \in FRM_\rho$ *y* $n \in \mathbb{N}$, tales que $e = (\forall v_n \alpha)$, o

9. Hay únicos $\alpha \in FRM_\rho$ *y* $n \in \mathbb{N}$, tales que $e = (\exists v_n \alpha)$.

Definición$_1$. Una ρ–expresión e es un *Bloque* syss es una ρ–fórmula atómica o es una ρ–fórmula universal o existencial; es decir, si e tiene alguna de siguientes formas:
a) $e \risingdotseq (\tau_1 \approx \tau_2)$, donde τ_1, τ_2 son ρ–términos, o
b) $e \risingdotseq P(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, donde $P \in \mathcal{P}_n$ y $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son ρ–términos, o
c) $e \risingdotseq (\forall v_n \beta)$, donde $n \in \mathbb{N}$ y β es una ρ–fórmula, o
d) $e \risingdotseq (\exists v_n \beta)$, donde $n \in \mathbb{N}$ y β es una ρ–fórmula.

Ejemplos: …

Notación:

1) $\mathbb{B}_\rho = \left\{ e \in EXP_\rho \ / \ e \text{ es un bloque} \right\}$
2) Usaremos las letras mayúsculas $A, B, C,$ ... como metavariables para bloques. Algunas veces las (**mal**) llamaremos *Letras Proposicionales.*

Definición$_2$ Recursiva de $\mathbb{B}_\rho$*–Fórmula,* $\Phi(\mathbb{B}_\rho)$:
$\Phi(\mathbb{B}_\rho)$ es el $\subseteq$–menor conjunto de ρ–expresiones que contiene a los bloques y es cerrado bajo conectivos; es decir, cumple con:

•) **I**) $\mathbb{B}_\rho \subseteq \Phi(\mathbb{B}_\rho) \subseteq EXP_\rho$

II) Si $e_1,\ e_2, \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, entonces

$$(\neg e_1),\ (e_1\ \&\ e_2),\ (e_1 \vee e_2),\ (e_1 \to e_2),\ (e_1 \leftrightarrow e_2) \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$$

• •) Si $E \subseteq EXP_\rho$ y cumple con **I**) y **II**), entonces $\Phi(\mathbb{B}_\rho) \subseteq E.$

Principio de Inducción sobre la Formación de $\mathbb{B}_\rho$–Fórmulas

Sea $\wp$ una propiedad que compete a las ρ–expresiones.

Si **I**) $\wp(A)$ para toda $A \in \mathbb{B}_\rho$. **Y**

II) Si $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ son tales que $\wp(\alpha)$ y $\wp(\beta)$ entonces

$$\wp(\neg\alpha)\ ,\ \wp(\alpha\ \&\ \beta)\ ,\ \wp(\alpha \vee \beta)\ ,\ \wp(\alpha \to \beta)\ ,\ \wp(\alpha \leftrightarrow \beta)$$

entonces para toda $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ se tiene que $\wp(\alpha)$.

También aquí hay un principio de lectura único.

Proposición$_{00}$. (Metateorema de Lectura Única para $\Phi(\mathbb{B}_\rho)$).
$\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ syss

i)	$\alpha \fallingdotseq A$	para un único $A \in \mathbb{B}_\rho$, o
iii)	$\alpha \fallingdotseq (\neg\beta)$	para un único $\beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, o
iii)	$\alpha \fallingdotseq (\beta\ \&\ \gamma)$	para únicos $\beta,\ \gamma \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, o
iv)	$\alpha \fallingdotseq (\beta \vee \gamma)$	para únicos $\beta,\ \gamma \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, o
v)	$\alpha \fallingdotseq (\beta \to \gamma)$	para únicos $\beta,\ \gamma \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, o
vi)	$\alpha \fallingdotseq (\beta \leftrightarrow \gamma)$	para únicos $\beta,\ \gamma \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$

y solamente uno de los casos se dá.

La prueba la siguiente afirmación es inmediata de los principios de lectura.

Proposición$_1$. $\Phi(\mathbb{B}_\rho) = FRM_\rho$.

Vamos ahora a dar las nociones básicas para tener lo que se llaman *Tablas de Verdad.*

Definición$_3$. v es una *Asignación de Valores de Verdad a* $\mathbb{B}_\rho$, o $\mathbb{B}_\rho$*–Asignación* syss

$$v : \mathbb{B}_\rho \to \{0, 1\}$$

Notación. ${}^{\mathbb{B}_\rho}2 = \{v \ / \ v \text{ es una } \mathbb{B}_\rho\text{–asignación}\}$.

Proposición$_2$. Para cada $v \in {}^{\mathbb{B}_\rho}2$, hay una única v^* tal que:

$$v^* : \Phi(\mathbb{B}_\rho) \to \{0, 1\}$$

I) $v^*(A) = v(A)$, para toda $A \in \mathbb{B}_\rho$

II) Si $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, entonces

a) $v^*(\neg\alpha) = 1 - v^*(\alpha)$

b) $v^*(\alpha \ \& \ \beta) = min\,\{v^*(\alpha), v^*(\beta)\}$

c) $v^*(\alpha \vee \beta) = max\,\{v^*(\alpha), v^*(\beta)\}$

d) $v^*(\alpha \to \beta) = max\,\{1 - v^*(\alpha), v^*(\beta)\}$

e) $v^*(\alpha \leftrightarrow \beta) = min\,\{v^*(\alpha \to \beta), v^*(\beta \to \alpha)\}$

Prueba: *PENDIENTE.* †

Observación$_1$: Debido a que v es *función* y *solo* toma el valor de 0 o de 1, tenemos:

$$v^*(\alpha) = 0 \quad \text{syss} \quad v^*(\alpha) \neq 1$$

o, equivalentemente,

$$v^*(\alpha) = 1 \quad \text{syss} \quad v^*(\alpha) \neq 0$$

Si $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ y $v \in {}^{\mathbb{B}_\rho}2$, entonces $v^*(\alpha) \in \{0, 1\}$ y se llamará *el valor de verdad que toma* α *bajo* v.

Proposición$_3$. Si $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ y $v \in {}^{\mathbb{B}_\rho}2$, entonces

a) $v^*(\neg\alpha) = 1$ syss $v^*(\alpha) = 0$

b) $v^*(\alpha \ \& \ \beta) = 1$ syss $v^*(\alpha) = 1 = v^*(\beta)$

c) $v^*(\alpha \vee \beta) = 0$ syss $v^*(\alpha) = 0 = v^*(\beta)$

d) $v^*(\alpha \to \beta) = 0$ syss $v^*(\alpha) = 1$ y $v^*(\beta) = 0$

e) $v^*(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$ syss $v^*(\alpha) = v^*(\beta)$

Prueba: *Ejercicio.* †

Definición₄. Sea $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$,

a) α es una *Tautología* syss para toda $v \in {}^{\mathbb{B}_\rho}2,\ v^*(\alpha) = 1$

b) α es una *Contradicción* syss para toda $v \in {}^{\mathbb{B}_\rho}2,\ v^*(\alpha) = 0$

c) α es *Contingente* syss α no es ni una tautología, ni una contradicción

Nota. A las contingentes también se les conoce con los nombres de *Eventuales* o *Circunstanciales.*

Notación:

$$\mathcal{T}_\rho = \left\{\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)\ /\ \alpha \text{ es una tautología}\right\}$$

$$\mathcal{C}_\rho = \left\{\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)\ /\ \alpha \text{ es una contradicción}\right\}$$

Así, $\Phi(\mathbb{B}_\rho) \setminus (\mathcal{T}_\rho \cup \mathcal{C}_\rho)$ es el conjunto de las contingentes.

Proposición₄. Sea $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$. Así,

a) $\alpha \in \mathcal{T}_\rho$ syss $(\neg\alpha) \in \mathcal{C}_\rho$

b) $\alpha \in \mathcal{C}_\rho$ syss $(\neg\alpha) \in \mathcal{T}_\rho$

Prueba: *Ejercicio.* †

Ejemplos:

1. $\mathbb{B}_\rho \subseteq \left[\Phi(\mathbb{B}_\rho)\ \setminus\ (\mathcal{T}_\rho \cup \mathcal{C}_\rho)\right]$ (Los bloques son contingentes)
2. $(v_0 \approx v_0) \in \left[\mathbb{B}_\rho\ \cap\ \mathcal{UV}_\rho\right]$
3. $(\exists v_0(\neg(v_0 \approx v_0))) \in \left[\mathbb{B}_\rho\ \cap\ \mathcal{UF}_\rho\right]$
4. $(v_0 \approx v_1) \in \left[\mathbb{B}_\rho\ \setminus\ \left(\mathcal{UV}_\rho\ \cup\ \mathcal{UF}_\rho\right)\right]$
5. $(\neg(v_0 \approx v_0)) \to (\neg(v_0 \approx v_0)) \in \left[\left(\Phi(\mathbb{B}_\rho) \setminus \mathbb{B}_\rho\right)\ \cap\ \mathcal{T}_\rho\right]$
6. $((v_0 \approx v_1) \to (v_1 \approx v_0)) \in \left[\left((\Phi(\mathbb{B}_\rho) \setminus \mathbb{B}_\rho)\ \cap\ \mathcal{UV}_\rho\right)\ \setminus\ \mathcal{T}_\rho\right]$
7. $((v_0 \approx v_1)\ \&\ (v_1 \approx v_2)) \in \left[(\Phi(\mathbb{B}_\rho) \setminus \mathbb{B}_\rho)\ \setminus\ \left(\mathcal{UV}_\rho\ \cup\ \mathcal{UF}_\rho\right)\right]$
8. $((v_0 \approx v_1) \to (\neg(v_1 \approx v_0))) \in \left[\left((\Phi(\mathbb{B}_\rho) \setminus \mathbb{B}_\rho)\ \cap\ \mathcal{UF}_\rho\right)\ \setminus\ \mathcal{C}_\rho\right]$
9. $((v_0 \approx v_1)\ \&\ (\neg(v_0 \approx v_1))) \in \left[\left(\Phi(\mathbb{B}_\rho) \setminus \mathbb{B}_\rho\right)\ \cap\ \mathcal{C}_\rho\right]$