Veamos que toda tautología es una universalmente verdadera. Necesitamos el siguiente,

Lema$_5$. Para cada ρ–estructura $\mathfrak{A}$ y cada A–asignación s hay una $\mathbb{B}_\rho$–asignación $v_{\mathfrak{A},s}$ tal, que para toda $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ se tiene,

$$v^*_{\mathfrak{A},s}(\alpha) = 1 \text{ syss } \mathfrak{A} \models \alpha[s] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad *(\alpha)$$

Prueba. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $s \in {}^\omega A$. Definimos $v_{\mathfrak{A},s} : \mathbb{B}_\rho \to \{0,1\}$ como sigue:

$$\text{Si } A \in \mathbb{B}_\rho, \qquad v_{\mathfrak{A},s}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathfrak{A} \models A[s] \\ & \text{o} \\ 0 & \text{si } \mathfrak{A} \not\models A[s] \end{cases}$$

Veamos que la correspondiente $v^*_{\mathfrak{A},s}$ cumple con lo exigido y esto lo haremos por inducción sobre la formación de fórmulas:

I) Sea $A \in \mathbb{B}_\rho$. Probemos que $*(A)$.

$\Leftarrow]$ Supongamos que $\mathfrak{A} \models A[s]$. De las definiciónes de $v^*_{\mathfrak{A}s}$ y $v_{\mathfrak{A}s}$, tenemos que

$$v^*_{\mathfrak{A},s}(A) = v_{\mathfrak{A},s}(A) = 1$$

$\Rightarrow]$ Si $\mathfrak{A} \not\models A[s]$, tenemos que $v^*_{\mathfrak{A},s}(A) = v_{\mathfrak{A},s}(A) = 0$ y por la **Observación$_1$**, $v_{\mathfrak{A},s}(A) \neq 1$.

II) Sean $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ y supongamos inductivamente que $*(\alpha)$ y $*(\beta)$.

a)	$v^*_{\mathfrak{A},s}(\neg\alpha) = 1$	syss	$v^*_{\mathfrak{A},s}(\alpha) = 0$	3.a)
		syss	$v^*_{\mathfrak{A},s}(\alpha) \neq 1$	**Observación$_1$**
		syss	$\mathfrak{A} \not\models \alpha[s]$	$*(\alpha)$ (H.I.)
		syss	$\mathfrak{A} \models \neg\alpha[s]$	Tarski
b)	$v^*_{\mathfrak{A},s}(\alpha \to \beta) = 1$	syss	$v^*_{\mathfrak{A},s}(\alpha) = 0$ o $v^*_{\mathfrak{A},s}(\beta) = 1$	3.d)
		syss	$v^*_{\mathfrak{A},s}(\alpha) \neq 1$ o $v^*_{\mathfrak{A},s}(\beta) = 1$	**Observación$_1$**
		syss	$\mathfrak{A} \not\models \alpha[s]$ o $\mathfrak{A} \models \beta[s]$	$*(\alpha)$ y $*(\beta)$ (H.I.)
		syss	$\mathfrak{A} \models (\alpha \to \beta)[s]$	Tarski

dejamos al lector los otros tres casos. Con lo que concluimos que para toda $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, se tiene $*(\alpha)$. †

Proposición$_6$.

a) $\mathcal{T}_\rho \subsetneq \mathcal{UV}_\rho$

b) $\mathcal{C}_\rho \subsetneq \mathcal{UF}_\rho$

Prueba. La no igualdad entre estos conjuntos quedó establecida con los ejemplos dados anteriormente.

a) Procederemos por contrapositiva. Supongamos pues que, $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho) \setminus \mathcal{UV}_\rho$. Así, hay una $\mathfrak{A}_0 \in V_\rho$ y una $s_0 \in {}^{\omega}A$ tal, que $\mathfrak{A}_0 \not\models \alpha[s_0]$. Por el lema anterior hay una $\mathbb{B}_\rho$-asignación $v_{\mathfrak{A}_0,s_0}$ tal, que

$$v^*_{\mathfrak{A}_0,s_0}(\alpha) = 1 \text{ syss } \mathfrak{A}_0 \models \alpha[s]$$

Como es el caso que $\mathfrak{A}_0 \not\models \alpha[s_0]$, tenemos que $v^*_{\mathfrak{A}_0}(\alpha) \neq 1$ y por tanto $\alpha \notin \mathcal{T}_\rho$.

b) Si $\alpha \in \mathcal{C}_\rho$, entonces $(\neg\alpha) \in \mathcal{T}_\rho$ y por el **a**) tenemos, $(\neg\alpha) \in \mathcal{UV}_\rho$ y de aquí que $\alpha \in \mathcal{UF}_\rho$. †

Es claro que no toda universalmente válida es una tautología pero, ¿bajo que condiciones se podría garantizar que sí lo fuera? La respuesta la encontramos bajo la suposición de que en la fórmula **no** aparezca el símbolo de igualdad ni tampoco un cuantificador.

Lema$_7$. Para cada $\mathbb{B}_\rho$–asignación v, hay una ρ–estructura $\mathfrak{A}_v$ y una A_v–asignación s_v tales que, para toda $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, en la cual no aparecen los símbolos de igualdad $(\approx)$ ni los cuntificadores $\left(\forall, \exists\right)$, se tiene:

$$\mathfrak{A}_v \models \alpha[s_v] \quad \text{syss} \quad v^*(\alpha) = 1$$

Prueba: Sea v una $\mathbb{B}_\rho$–asignación.

Definimos una ρ–estructura $\mathfrak{A}_v$ como sigue:

a). $|\mathfrak{A}_v| = TRM_\rho \rightleftharpoons A_v$.

b). Si $P \in \mathcal{P}_n$, sea $P^{\mathfrak{A}_v} = \left\{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in A_v^n \ / \ v(P(a_1, \ldots, a_n)) = 1\right\}$.

c). Si $f \in \mathcal{F}_n$, entonces $f^{\mathfrak{A}_v} : A_v^n \to A_v$ dada como sigue:

Si $a_1, \ldots, a_n \in A_v$, $f^{\mathfrak{A}_v}(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n)$

d). Si $c \in \mathcal{C}$, sea $c^{\mathfrak{A}_v} = c$.

También definimos s_v, una A_v-asignación, como: $s_v = \langle v_0, v_1, v_2, \ldots\rangle$; es decir:

$$s_v : VAR \to A_v$$
$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad s_v(v_i) = v_i$$

Af. Para cualquier ρ–término τ, se tiene:

$$\tau^{\mathfrak{A}_v}[s_v] = \tau$$

Esto lo podemos ver por inducción sobre la formación de términos:

i). $v_i^{\mathfrak{A}_v}[s_v] = s_v(i) = v_i$ y $c^{\mathfrak{A}_v}[s_v] = c$.

ii). Si $f \in \mathcal{F}_n$ y $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son ρ–términos, tenemos:

$$\begin{array}{rcll} f(\tau_1,\ldots,\tau_n)^{\mathfrak{A}_v}[s_v] & = & f^{\mathfrak{A}_v}(\tau_1^{\mathfrak{A}_v}[s_v],\ldots,\tau_n^{\mathfrak{A}_v}[s_v]) & \text{def. de interpretación} \\ & = & f^{\mathfrak{A}_v}(\tau_1,\ldots,\tau_n) & \text{H.I.} \\ & = & f(\tau_1,\ldots,\tau_n) & \text{def. de } f. \end{array}$$

Pasemos ahora a la prueba del **Lema**. Lo que tenemos que probar es que:
Para toda $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, en la cual no aparecen los símbolos $\approx, \forall, \exists$, se tiene:

$$\mathfrak{A}_v \models \alpha[s_v] \quad \text{syss} \quad v^*(\alpha) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ^{**}(\alpha)$$

Y esto lo haremos por inducción sobre la formación de fórmulas.

I] Sea α una fórmula atómica, en la cual no aparece el símbolo $\approx$. Así $\alpha \rightleftharpoons P(\tau_1,\ldots,\tau_n)$, donde $P \in \mathcal{P}_n$ y $\tau_1,\ldots,\tau_n$ son ρ–términos.

$$\begin{array}{rll} \mathfrak{A}_v \models P(\tau_1,\ldots,\tau_n)[s_v] & \text{syss } \langle \tau_1^{\mathfrak{A}_v}[s_v],\ldots,\tau_n^{\mathfrak{A}_v}[s_v]\rangle \in P^{\mathfrak{A}_v} & \text{Tarski} \\ & \text{syss } \langle \tau_1,\ldots,\tau_n\rangle \in P^{\mathfrak{A}_v} & \textbf{Af}. \\ & \text{syss } v(P(\tau_1,\ldots,\tau_n)) = 1 & \text{def. de } P^{\mathfrak{A}_v} \\ & \text{syss } v^*(P(\tau_1,\ldots,\tau_n)) = 1 & P(\tau_1,\ldots,\tau_n) \in \mathbb{B}_\rho \text{ y } v^* \restriction \mathbb{B}_\rho = v \end{array}$$

II] Sean β y γ fórmulas en las cuales no aparecen los símbolos $\approx, \forall, \exists$ y que cumplen, inductivamente, con $^{**}(\beta)$ y $^{**}(\gamma)$. Así,

$$\begin{array}{rll} \mathfrak{A}_v \models \neg\beta[s_v] & \text{syss } \mathfrak{A}_v \not\models \beta[s_v] & \text{Tarski} \\ & \text{syss } v^*(\beta) \neq 1 & ^{**}(\beta) \\ & \text{syss } v^*(\neg\beta) = 1 & \text{prop. de } v^* \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rll} \mathfrak{A}_v \models (\beta \,\&\, \gamma)[s_v] & \text{syss } \mathfrak{A}_v \models \beta[s_v] \text{ y } \mathfrak{A}_v \models \gamma[s_v] & \text{Tarski} \\ & \text{syss } v^*(\beta) = 1 \text{ y } v^*(\gamma) = 1 & ^{**}(\beta) \text{ y } ^{**}(\gamma) \\ & \text{syss } v^*(\beta \,\&\, \gamma) = 1 & \text{prop. de } v^* \end{array}$$

en forma similar se prueba para los conectivos $\vee, \rightarrow$ y $\leftrightarrow$. †

Proposición$_8$. Sea α una fórmula en la cual no aparecen los símbolos $\approx$, $\forall$, $\exists$. Así,

Si α es una Universalmente Verdadera, entonces α es una Tautología.

Prueba: Lo haremos por contrapositiva. Supongamos pues que α no es una tautología. Por lo que hay una $\mathbb{B}_\rho$–asignación, digamos v_0, tal que $v_0(\alpha) \neq 1$. Por el Lema anterior hay una estructura $\mathfrak{A}_{v_0}$ y una A_{v_0}–asignación s_{v_0} tales que

$$\mathfrak{A}_{v_0} \not\models \alpha[s_{v_0}]$$

y por tanto α no es una fórmula universalmente verdadera. †