Equivalencia e Implicación Lógica

Definición. Sean $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B})$.

I) *α es Lógicamente Equivalente a β* syss $\dot{\forall}\ v \in {}^{\mathbb{B}}2\Big[v^*(\alpha) = v^*(\beta)\Big]$

Notación: $\alpha \equiv \beta$. En caso contrario $\alpha \not\equiv \beta$

II) *α Implica Lógicamente a β* syss $\dot{\forall}\ v \in {}^{\mathbb{B}}2\Big[$Si $v^*(\alpha) = 1,$ entonces $v^*(\beta) = 1\Big]$

Notación: $\alpha \models \beta$. En caso contrario $\alpha \not\models \beta$

El método de las tablas de verdad nos permite decidir si dos fórmulas son lógicamente equivalentes o no lo son, o si una implica lógicamente a la otra o no.

Ejemplos: Sean $\alpha,\ \beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ y $A,\ B \in \mathbb{B}_\rho$.

1. $(\alpha \to \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$

2. $(A \to B) \not\equiv (B \to A)$. Tomar $v \in {}^{\mathbb{B}_\rho}2$ tal, que $v(A) = 1$ y $v(B) = 0$

3. $(\alpha \to \beta) \equiv (\neg\beta \to \neg\alpha)$ (Contrapositiva)

4. $(\alpha \ \&\ \beta) \models (\alpha \vee \beta)$

5. $(A \vee B) \not\models (A \ \&\ B)$. Tomar $v \in {}^{\mathbb{B}_\rho}2$ tal, que $v(A) \neq v(B)$

6. Para cualquier γ se tiene,

a. $\gamma \models (A \vee \neg A)$

b. $(A \ \&\ \neg A) \models \gamma$

No hay que confundir el bicondicional con la relación de equivalencia lógica. El bicondicional $(\leftrightarrow)$ es un símbolo del lenguaje objeto, es un conectivo, mientras que el símbolo $\equiv$ se encuentra en el metalenguaje, es un meta–símbolo. Por un lado, tenemos que $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ es una fórmula, una sucesión finita de símbolos del lenguaje formal (un objeto, de hecho, una $\mathbb{B}$–expresión) y no es una proposición (no se puede calificar ni de verdadero ni de falso); en cambio, $\alpha \equiv \beta$ no es una fórmula, es una proposición en el metalenguaje, la cual afirma que α es lógicamente equivalente a β.

Así si, por ejemplo, $A,\ B \in \mathbb{B}$, la fórmula $(A \leftrightarrow B)$ *persé* no es ni verdadera ni falsa; puede tomar el valor de verdad de 1 con algunas $\mathbb{B}$–asignaciones y el de 0 bajo otras; en cambio podemos afirmar que A y B **no** son lógicamente equivalentes, $A \not\equiv B$, pues podemos dar una $\mathbb{B}$–asignación v tal que $v^*(A) = 1$ y $v^*(B) = 0$.

Algo similar ocurre entre la implicación lógica $(\models)$ y el condicional $(\to)$. No hay que confundirlos.

A pesar de ser diferentes hay una estrecha relación entre estos.

Proposición$_0$. Sean $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B})$.

a) $\alpha \equiv \beta$ syss $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in \mathcal{T}_{\mathbb{B}}$

b) $\alpha \models \beta$ syss $(\alpha \rightarrow \beta) \in \mathcal{T}_{\mathbb{B}}$

Prueba: **Ejercicio**. †

La relación entre la equivalencia y la implicación lógicas queda establecida en la siguiente,

Proposición$_{00}$. Sean $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B})$.

a) Si $\alpha \equiv \beta$, entonces $\alpha \models \beta$ pero no necesariamente se tiene la conversa.

b) $\alpha \equiv \beta$ syss $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$

Prueba: **Ejercicio**. †

Las nociones de Implicación y Equivalencia Lógica adquieren particular importancia debido a que nos abren las puertas para tener métodos de prueba.

Esto lo podemos ver para la equivalencia lógica de la siguiente manera: En primer lugar, sabemos que toda tautología es una verdad universal, por lo que si $\alpha \equiv \beta$ tendríamos $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in \mathcal{T}_{\mathbb{B}}$ y por Tarski,

$$\dot{\forall}\ \mathfrak{A} \in V_\rho \left[\mathfrak{A} \models \alpha \ \text{ syss } \ \mathfrak{A} \models \beta \right]$$

Por tanto, si quisieramos probar que algún enunciado (digamos α) es verdadero, en algún determinado universo (digamos $\mathfrak{A}$), bastaría encontrar otro enunciado (digamos β) que fuera lógicamente equivalente a él $(\alpha \equiv \beta)$ y probar que este último (β) es verdadero (en $\mathfrak{A}$).

De hecho, todo esto es mucho pedir; sería suficiente con tener que $\beta \models \alpha$.

Pasemos ahora a dar algunas propiedades básicas de éstas nuevas nociones.

Proposición$_1$. Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi(\mathbb{B})$.

I) **a**). $\alpha \equiv \alpha$

b). Si $\alpha \equiv \beta$, entonces $\beta \equiv \alpha$

c). Si $\alpha \equiv \beta$ y $\beta \equiv \gamma$, entonces $\alpha \equiv \gamma$

La relación $\equiv$ es de equivalencia sobre $\Phi(\mathbb{B})$.

II) **a**). $\alpha \models \alpha$

b). Hay α y β tales que $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$ y sin embargo $\alpha \neq \beta$

c). Si $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \gamma$, entonces $\alpha \models \gamma$

La relación $\models$, **no** establece un orden parcial (reflexivo) en $\Phi(\mathbb{B})$, solo un preorden.

Prueba: Ejercicio. †

Un par de ejemplos que necesitamos son,

7. Leyes asociativas de la conjunción y la disyunción.

i. $(\alpha \ \& \ (\beta \ \& \ \gamma)) \equiv ((\alpha \ \& \ \beta) \ \& \ \gamma)$

ii. $(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$

Pasemos ahora a una,

Convensión sobre el uso de paréntesis

1. Los paréntesis externos, se pueden suprimir.

2. Los paréntesis en torno a la negación se pueden omitir.

3. Las leyes asociativas de la conjunción y la disyunción, nos permiten omitir los paréntesis cuando se tiene una sucesión de éstas. Por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
(A \ \& \ \neg B) \ \& \ (C \ \& \ D) &\ \leftrightharpoons\ A \ \& \ \neg B \ \& \ C \ \& \ D \\
A \vee (B \vee (\neg C \vee D)) &\ \leftrightharpoons\ A \vee B \vee \neg C \vee D \\
(A \to \neg B) \ \& \ (B \ \& \ (C \vee \neg D)) &\ \leftrightharpoons\ (A \to \neg B) \ \& \ B \ \& \ (C \vee \neg D) \\
A \to (\neg B \vee (A \vee (C \ \& \ D))) &\ \leftrightharpoons\ A \to (\neg B \vee A \vee (C \ \& \ D))
\end{aligned}
$$

4. La conjunción y la disyunción *ligan* más que el condicional y el bicondicional. Por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
(A \ \& \ B) \to C &\ \leftrightharpoons\ A \ \& \ B \to C \\
A \leftrightarrow (C \vee D) &\ \leftrightharpoons\ A \leftrightarrow C \vee D \\
(A \ \& \ B) \to (C \vee D) &\ \leftrightharpoons\ A \ \& \ B \to C \vee D \\
A \vee (B \leftrightarrow (C \ \& \ D)) &\ \leftrightharpoons\ A \vee (B \leftrightarrow C \ \& \ D)
\end{aligned}
$$

5. Algunas veces utilizaremos los paréntesis cuadrados:] y [

Más ejemplos:

8. $(A \ \& \ B) \vee C \not\equiv A \ \& \ (B \vee C)$

i). $A \ \& \ (B \vee C) \models (A \ \& \ B) \vee C$

ii). $(A \ \& \ B) \vee C \not\models A \ \& \ (B \vee C)$
$\big(v(A) = 0$ y $v(B) = 1 = v(C)$ o $v(A) = 0 = v(B)$ y $v(C) = 1\big)$

9. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$ (Ley asociativa para el bicondicional)

10. ¿ $(A \to B) \vee (B \to A) \in \mathcal{T}$?

11. ¿ $A \ \& \ B \to C \models (A \to C) \vee (B \to C)$?

12. **i**. ¿ $A \vee B \to C \models (A \to C) \vee (B \to C)$?
ii. ¿ $(A \to C) \vee (B \to C) \models A \vee B \to C$?

13. $(A \ \& \ \neg B) \vee (B \ \& \ \neg A) \equiv (A \vee B) \ \& \ \neg(A \ \& \ B)$ (Corresponde al "o" exclusivo)

14. $(A \vee B) \ \& \ \neg B \models A$ (Ley del perro o Silogismo Disyuntivo)

15. **i**. $(A \to B) \ \& \ B \not\models A$
ii. $(A \to B) \ \& \ A \models B$ (Modus Ponens)

16. $(A \to B) \ \& \ \neg B \models \neg A$ (Modus Tolens)

17. Ver las Tablas de las Tautologías.