Metateoremas de Sustitución

Fijemos un tipo de semejanza, ρ.

Recordemos que tenemos como **notación**: Para $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$,

$$\mathbb{B}(\alpha) = \left\{ A \in \mathbb{B} \ / \ A \text{ aparece en } \alpha \right\}$$

Como hemos visto, es de crucial importancia encontrar equivalencias lógicas de una fórmula. En esta sección veremos algunos resultados que nos ayudarán a allanar este camino, primeramente veremos las consecuencias que resultan de sustituir en una fórmula una de sus subfórmulas por otra fórmula. Empezaremos por sustituir letras proposicionales.

Consideremos el siguiente escenario:

Supongamos que con cada letra proposicional, digamos $C \in \mathbb{B}$, hay asociada una fórmula, la cual denotaremos por γ_C.

Esta asociación, de letras con fórmulas, repercute en las fórmulas mismas; es decir, cada fórmula α está asociada con la fórmula α' que resulta de reemplazar cada letra proposicional, por su fórmula asociada. Un poco más explícito, si $\mathbb{B}(\alpha) = \left\{ A_1, \ldots, A_n \right\}$, la fórmula α' se obtiene al quitar A_i y poner en su lugar γ_{A_i} y esto para cada $i \in \left\{ 1, \ldots, n \right\}$.

Ahora bien, al dar una asignación de valores de verdad a las letras proposicionales, digamos v, nos preguntamos por el valor de verdad que toma la fórmula α', por el valor de $v^*(\alpha')$. Para seguir con la idea, supongamos que $\mathbb{B}(\alpha') = \{B_1, \ldots, B_m\}$. Esto se vería así,

	B_1	$\ldots$	B_m	α'
		$\vdots$		$\vdots$
v	$v(B_1)$	$\ldots$	$v(B_m)$	$v^*(\alpha') = \ ?$
		$\vdots$		$\vdots$

Lo primero que habría que hacer, para encontrar el valor de $v^*(\alpha')$, sería calcular los valores que toman las fórmulas γ_{A_i} con esta asignación:

	B_1	$\ldots$	B_m	γ_{A_1}	$\ldots$	γ_{A_n}	α'
		$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$
v	$v(B_1)$	$\ldots$	$v(B_m)$	$v^*(\gamma_{A_1})$	$\ldots$	$v^*(\gamma_{A_n})$	$v^*(\alpha') = \ ?$
		$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$

Al llegar este momento, podemos ayudarnos ahora de la tabla de verdad de la fórmula original, de α; fijándonos en la $\mathbb{B}$–asignación, digamos μ, para el cual los valores de $A_1, \ldots, A_n$ coinciden con los de $\gamma_{A_1}, \ldots, \gamma_{A_n}$ respectivamente.

	A_1	$\ldots$	A_n	α
		$\vdots$		$\vdots$
μ	$v^*(\gamma_{A_1})$	$\ldots$	$v^*(\gamma_{A_n})$	$\mu^*(\alpha)$
		$\vdots$		$\vdots$

Y así tendríamos que $v^*(\alpha') = \mu^*(\alpha)$.

Ejemplo: $\alpha \rightleftharpoons A \ \& \ B \to C$ y $\gamma_A \rightleftharpoons (D \vee \neg C)$, $\gamma_B \rightleftharpoons (F \to G)$ y $\gamma_C \rightleftharpoons (D \leftrightarrow \neg F)$. Aquí,

$$\alpha' \rightleftharpoons (D \vee \neg C) \ \& \ (F \to G) \to (D \leftrightarrow \neg F)$$

Suponiendo que estamos bajo el escenario anterior, estas ideas la concretamos en el siguiente,

Lema$_1$. Sea $v \in {}^{\mathbb{B}}2$ arbitraria. Si μ es la $\mathbb{B}$–asignación definida por: Para toda $C \in \mathbb{B}$, $\mu(C) = v^*(\gamma_C)$, entonces

Para cada $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$, se tiene que $v^*(\alpha') = \mu^*(\alpha)$.

Prueba: Usaremos inducción sobre la formación de fórmulas.

I). Sea $A \in \mathbb{B}$. Sabemos que $A' = \gamma_A$ y que $\mu(A) = v^*(\gamma_A)$. Así,

$$\mu^*(A) = \mu(A) = v^*(\gamma_A) = v^*(A')$$

II). Sean $\alpha,\ \beta \in \Phi(\mathbb{B})$ que cumplen inductivamente con $v^*(\alpha') = \mu^*(\alpha)$ y $v^*(\beta') = \mu^*(\beta)$.

a). Consideremos a la fórmula $(\neg\alpha)$. Sabemos que $(\neg\alpha)' = (\neg(\alpha'))$. Así,

$$v^*\big((\neg\alpha)'\big) = v^*(\neg(\alpha')) = 1 - v^*(\alpha') \underset{\textbf{HI}}{=} 1 - \mu^*(\alpha) = \mu^*(\neg\alpha)$$

b). Consideremos ahora a la fórmula $(\alpha \ \& \ \beta)$. Sabemos que $(\alpha \ \& \ \beta)' = (\alpha' \ \& \ \beta')$. Así,

$$v^*\big((\alpha \ \& \ \beta)'\big) = v^*(\alpha' \ \& \ \beta') = min\big\{v^*(\alpha'),\ v^*(\beta')\big\} \underset{\textbf{HI}}{=} min\big\{\mu^*(\alpha),\ \mu^*(\beta)\big\} = \mu^*(\alpha \ \& \ \beta)$$

En forma similar, se puede verificar el resultado para los restantes conectivos. †

Con ayuda de este lema podemos establecer el siguiente resultado.

MTS$_1$. Sea $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$ tal que $\mathbb{B}(\alpha) = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Sean $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \Phi(\mathbb{B})$ arbitrarias y sea β la fórmula que se obtiene a partir de α al sustituir $A_1, \ldots, A_n$ por $\beta_1, \ldots, \beta_n$ respectivamente. Así

$$\text{Si } \models \alpha \quad \text{entonces} \quad \models \beta$$

Prueba. Supongamos que $\models \alpha$ y veamos que $\models \beta$. Sea pues $v \in {}^{\mathbb{B}}2$, demostremos que $v^*(\beta) = 1$. Con la intensión de utilizar el lema anterior, montemos nuestro escenario:

Para cada $C \in \mathbb{B}$, sea

$$\gamma_C = \begin{cases} \beta_i & \text{si } C = A_i \text{ para algún } i \in \{1, \ldots, n\} \\ \text{o} & \\ C & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Aquí tenemos que $\alpha' = \beta$. Ahora, para nuestra asignación v, consideramos la correspondiente asignación μ, a saber $\mu(A_i) = v^*(\beta_i)$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ –obsérvese que no es necesario especificar los otros casos (¿Por qué?). Con todo esto tenemos que,

$$v^*(\beta) = v^*(\alpha') \underset{\textbf{Lema}_1}{=} \mu^*(\alpha) = 1$$ †

Este resultado lo podemos leer así, *la sustitución de letras proposicionales por fórmulas en una tautología genera otra tautología.*

Ejemplos: …

Veamos ahora una consecuencia del resultado anterior.

MTS$_2$. Sean $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B})$ y supongamos que $\mathbb{B}(\alpha) \cup \mathbb{B}(\beta) = \{C_1, \ldots, C_n\}$ y sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Phi(\mathbb{B})$ arbitrarias. Sean α' y β' las fórmulas que se obtienen a partir de α y β respectivamente, al quitar $C_1, \ldots, C_n$ y poner en su lugar $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Así,

$$\text{Si } \alpha \equiv \beta, \text{ entonces } \alpha' \equiv \beta'$$

Prueba. Supongamos que $\alpha \equiv \beta$. Así, tenemos que $\models \alpha \leftrightarrow \beta$ y también que $\mathbb{B}(\alpha \leftrightarrow \beta) = \{C_1, \ldots, C_n\}$. Aplicando el **MTS**$_1$ obtenemos que $\models \alpha' \leftrightarrow \beta'$ y esto no es más que $\alpha' \equiv \beta'$. †

Dejamos al lector la prueba del siguiente resultado.

Proposición. Sean $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \Phi(\mathbb{B})$ como en el **MTS**$_2$. Así,

$$\models (\alpha \leftrightarrow \beta) \to (\alpha' \leftrightarrow \beta')$$

Prueba: **TAREA**. †

Ejemplos: …

Los resultados anteriores hablan de sustitución de letras proposicionales por fórmulas. Dicha sustitución se dice que es *uniforme,* pues cada letra proposicional es remplazada forzosamente por la fórmula correspondiente. Ahora, veamos el caso de sustituir subfórmulas de una fórmula dada, por otras fórmulas donde la sustitución no es necesariamente uniforme. Precisemos el concepto de *subfórmula.*

Definición Recursiva de $Sbf(\alpha)$, *el Conjunto de Subfórmulas de la Fórmula* α,

I). $Sbf(A) = \{A\}$, para cualquier $A \in \mathbb{B}$. Y

II). **i**). $Sbf(\neg\alpha) = Sbf(\alpha) \cup \{(\neg\alpha)\}$, para cualquier $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$

ii). $Sbf(\alpha \diamond \beta) = Sbf(\alpha) \cup Sbf(\beta) \cup \left\{ (\alpha \diamond \beta) \right\}$, para cualesquiera $\alpha,\ \beta \in \Phi(\mathbb{B})$

Donde $\diamond$, es cualquiera de los conectivos binarios[1]

(1) $\diamond \in \left\{\&\ ,\ \vee\ ,\ \to\ ,\ \leftrightarrow\right\}$

Lema$_2$. Sean $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in \Phi(\mathbb{B})$. Así,

1. $\alpha \equiv \alpha$
2. Si $\alpha \equiv \beta$, entonces $(\neg\alpha) \equiv (\neg\beta)$
3. Si $\alpha \equiv \beta$ y $\gamma \equiv \delta$, entonces $(\alpha \diamond \gamma) \equiv (\beta \diamond \delta)$
   Donde $\diamond$, es cualquiera de los conectivos binarios.

Prueba: **Ejercicio**.

Lema$_3$. Sean $\gamma,\ \delta \in \Phi(\mathbb{B})$ con $\gamma \equiv \delta$. Para cada $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$, si α^* es la fórmula que se obtiene a partir de α, al sustituir a lo más una ocurrencia de γ por δ, entonces

$$\alpha^* \equiv \alpha$$

Prueba: Se hará por inducción sobre la formación de fórmulas. Puesto que en algunas ocasiones hay que dividir en casos y algunos de ellos se repiten, los probaremos de antemano:

Caso $(*)$: No se hace ninguna sustitución; ya sea porque no se quiere, o símplemente, porque γ no es una subfórmula de α.
Aquí se tiene que $\alpha^* = \alpha$ y sabemos, por el **Lema**$_{2.1}$, que $\alpha \equiv \alpha$. Así,

$$\alpha^* = \alpha \equiv \alpha$$

Caso $(**)$: Se hace una sustitución y es por toda la fórmula $\alpha.$ Es decir, la subfórmula γ de $\alpha,$ es la misma $\alpha.$
Aquí se tiene que $\alpha^* = \delta$ y por hipótesis $\gamma \equiv \delta.$ Tenemos pues,

$$\alpha^* = \delta \equiv \gamma = \alpha$$

Pasemos ahora con la inducción.

I.] Sea $A \in \mathbb{B}.$ Aquí tenemos que $Sbf(A) = \{A\}.$ La sustitución cae o bien dentro del caso $(*)$ o bien dentro del caso $(**)$.

II.] **a**). Sea $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$ tal que cumple, inductivamente, con la propiedad y veamos que $(\neg\alpha)$ también la tiene.
Consideremos $(\neg\alpha)^*.$ Puesto que $Sbf(\neg\alpha) = Sbf(\alpha) \cup \left\{ (\neg\alpha) \right\},$ gracias a $(*)$ y a $(**)$ sólo nos queda ver el caso en que se hace una única sustitución de $\gamma,$ con $\gamma \in Sbf(\alpha).$
Tenemos que $(\neg\alpha)^* = (\neg(\alpha^*))$ y, por **H.I.**, $\alpha^* \equiv \alpha.$ De esto y gracias al **Lema**$_{2.2}$ tenemos,

$$(\neg\alpha)^* = (\neg(\alpha^*)) \equiv (\neg\alpha)$$

b). Sean $\alpha,\ \beta \in \Phi(\mathbb{B})$ que cumplen con la propiedad. Veamos que $(\alpha \diamond \beta)^{(2)}$ también la tiene. Puesto que $Sbf(\alpha \diamond \beta) = Sbf(\alpha) \cup Sbf(\beta) \cup \{(\alpha \diamond \beta)\},$ con respecto a la sustitución de γ en $(\alpha \diamond \beta)$ tenemos cuatro casos posibles, de los cuales $(*)$ y $(**)$ se encargan de dos de ellos. Veamos los casos que faltan, que son, cuando $\gamma \in Sbf(\alpha)$ y se hace la única sustitución en α o cuando $\gamma \in Sbf(\beta)$ y la sustitución se hace en $\beta.$ En el primero tenemos,

$$(\alpha \diamond \beta)^* = (\alpha^* \diamond \beta)$$

Ahora bien, tenemos, por la **H.I.**, que $\alpha^* \equiv \alpha,$ además tenemos que $\beta \equiv \beta;$ ahora usando el **Lema**$_{2.3}$ concluimos,

$$(\alpha \diamond \beta)^* = (\alpha^* \diamond \beta) \equiv (\alpha \diamond \beta)$$

el otro caso es similar.
(2) Aquí estamos usando la notación del Lema$_2$. †

Este resultado lo podemos repetir varias veces. Partimos de una fórmula, hacemos una sustitución y obtenemos su equivalente lógico; a la fórmula resultante a su vez le aplicamos nuevamente la sustitución y obtenemos su equivalente lógico, y así sucesivamente. Como resultado tenemos una cadena de fórmulas cada una de las cuales es lógicamente equivalente con la siguiente. Ahora bien, teniendo en cuenta la transitividad de la equivalencia lógica, podemos concluir que la última fórmula construida, por este proceso, es lógicamente equivalente con la fórmula original.

Este proceder lo podemos enunciar en un resultado, conocido con el nombre de *Principio de Sustitución por Fórmulas Equivalentes.*

MTS$_3$. Sean $\alpha, \gamma, \delta \in \Phi(\mathbb{B})$. Sea $\widetilde{\alpha}$ la fórmula que se obtiene a partir de α al sustituir algunas (ninguna, una o varias) ocurrencias de γ por δ. Así,

Si $\gamma \equiv \delta$, entonces $\alpha \equiv \widetilde{\alpha}$

Este principio se puede parafrasear de la siguiente manera: *La sustitución de subfórmulas en una fórmula por fórmulas lógicamente equivalentes, genera otra fórmula lógicamente equivalente a la original.*

Hay dos resultados inmediatos. El primero se puede ver como una generalización del **MTS**$_1$.

MTS$_4$. Sean $\alpha, \gamma, \delta, \widetilde{\alpha} \in \Phi(\mathbb{B})$, como en el **MTS**$_3$. Así,

Si $\models \alpha$ y $\gamma \equiv \delta$, entonces $\models \widetilde{\alpha}$

Este lo podemos leer de la siguiente manera: *La sustitución de subfórmulas por fórmulas lógicamente equivalentes en tautologías genera tautologías.*

Dejamos al lector la prueba del siguiente resultado.

Proposición. Sean $\alpha, \gamma, \delta, \widetilde{\alpha} \in \Phi(\mathbb{B})$ como en el **MTS**$_3$. Así,

$$\models (\gamma \leftrightarrow \delta) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \widetilde{\alpha})$$

Prueba: **TAREA**. †