Consecuencia Lógica

Desde un punto de vista lógico, un argumento no es más que una sucesión (finita) de premisas o hipótesis y una conclusión.

$$\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\beta}$$

Un argumento es correcto si la conclusión es consecuencia, si se sigue, de las premisas; en otro caso el argumento es incorrecto. En lógica nos limitamos al estudio de los argumentos desde la perspectiva de su corrección.

La relación de consecuencia, es decir, la relación que se da entre las premisas y la conclusión de un argumento correcto, no es relativa, no varía de un sujeto a otro: un argumento es correcto o no lo es; otra cosa es que sepamos si lo es.

Hemos dicho que un argumento es correcto si su conclusión se sigue, o es consecuencia, de sus premisas. Si bien no hay duda de que sabemos reconocer ciertos argumentos correctos como tales, también es cierto que nos veríamos en serias dificultades para explicar qué queremos decir, en general, cuando decimos que la conclusión de un argumento correcto se sigue de sus premisas.

Una de las características esenciales de los argumentos correctos es que si las premisas son verdaderas, la conclusión también será verdadera. Y de aquí que si la conclusión de un argumento correcto es falsa, por lo menos una de las hipótesis es falsa. Podemos decir, en lenguaje coloquial, que los argumentos correctos trasmiten o heredan la verdad de las premisas a la conclusión.

La lógica proposicional (lógica de los conectivos) retoma esta característica como punto de partida para definir lo que es un argumento correcto bajo el nombre de *Consecuencia Lógica.* Para nosotros repercute en generalizar la noción de implicación lógica, generalización que haremos no solo para un número finito de hipótesis, sino para un conjunto arbitrario de $\mathbb{B}$–fórmulas.

Definición. Sea $\Sigma \cup \{\alpha\} \subseteq \Phi(\mathbb{B})$.

1). **a**). Sea $v \in {}^{\mathbb{B}}2.$ Diremos que v *Satisface* a α syss $v^*(\alpha) = 1.$

b). Diremos que α es *Satisfacible* syss

hay una asignación de valores de verdad a los bloques, que satisface a α.

2). **a**). Sea $v \in {}^{\mathbb{B}}2$. Diremos que v *Satisface* a Σ syss v satisface a toda $\alpha \in \Sigma$

b). Diremos que Σ es *Satisfacible* syss
hay una asignación de valores de verdad a los bloques, que satisface a Σ.

Ejemplos:

1) $\emptyset$ es satisfacible.

2) $\mathbb{B}$ es satisfacible

3) $\{A, \neg A\}$ y $\{ A \ \& \ \neg A \}$ no son satisfacibles

4) $\{ A \to B \}$ es satisfacible

5) $\Phi(\mathbb{B})$ no es satisfacible

6) $\{ A \vee \neg A \}$ es satisfacible

Prueba: **Ejercicio**. †

Definición. Sea $\Sigma \cup \{\beta\} \subseteq \Phi(\mathbb{B})$. Diremos que β es *Consecuencia (Lógica) de* Σ, $\Sigma \models \beta$ syss toda asignación que satisface a Σ, satisface a β. En símbolos:

$$\Sigma \models \beta \text{ syss } \dot{\forall}\ v \in {}^{\mathbb{B}}2\left[\dot{\forall}\ \alpha \in \Sigma\Big(v^*(\alpha) = 1\Big) \Rightarrow v^*(\beta) = 1\right]$$

Los elementos de Σ se llaman *Hipótesis* y a la fórmula β se le llama *Conclusión.*

Proposición$_1$. Sean $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B})$.

1) $\emptyset \models \beta$ syss $\beta \in \mathcal{T}_\rho$

2) $\{\alpha\} \models \beta$ syss $\alpha \models \beta$

Prueba: Es inmediata de la definición. †

Esto último sugiere la siguiente,

Notación.

1) $\models \beta \quad \rightleftharpoons \quad \beta \in \mathcal{T}_\rho$

2) Si $\Sigma \cup \{\beta\} \subseteq \Phi(\mathbb{B})$ y Σ es finito digamos $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, escribiremos

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta \quad \rightleftharpoons \quad \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \beta$$

Pasemos a ver algunas propiedades básicas.

Proposición$_2$. Sea $\Gamma \cup \Sigma \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \Phi(\mathbb{B})$.

1. **a**). $\alpha \models \alpha$

b). Si $\alpha \in \Sigma$, entonces $\Sigma \models \alpha$

2. Monotonía.

a). Si $\alpha \models \beta$ entonces $\alpha, \gamma \models \beta$

b). Si $\Sigma \models \beta$ y $\Sigma \subseteq \Gamma$, entonces $\Gamma \models \beta$

3. Transitividad.

a). Si $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \gamma,$ entonces $\alpha \models \gamma$

b). Si $\Sigma \models \beta$ y $\beta \models \gamma,$ entonces $\Sigma \models \gamma$

c). Si para toda $\gamma \in \Gamma,\ \Sigma \models \gamma$ y además $\Gamma \models \beta,$ entonces $\Sigma \models \beta$

4. **a**). $\alpha \models \beta$ syss $\models \alpha \to \beta$

b). $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$ syss $\Sigma \models \alpha \to \beta$

(Versión semántica del Metateorema de la Deducción)

c). $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$ syss $\models (\alpha_1 \to (\alpha_2 \to (\ldots \to (\alpha_n \to \beta) \ldots)))$

5. **a**). $\alpha,\ \beta \models \alpha\ \&\ \beta$

b). $\alpha,\ \beta \models \gamma$ syss $(\alpha\ \&\ \beta) \models \gamma$ syss $\models (\alpha\ \&\ \beta) \to \gamma$

c). $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$ syss $\models (\alpha_1\ \&\ \alpha_2 \ldots \&\ \alpha_n) \to \beta$

Prueba: **Ejercicio**. †