A continuación veamos algunas propiedades de la consecuencia lógica que nos servirán como ejemplos de argumentos correctos.

Proposición$_3$. Sea $\Sigma \cup \{\alpha, \beta\} \subseteq \Phi(\mathbb{B})$, así,

1. Modus Ponens

a). $\alpha, \alpha \to \beta \models \beta$.

b). Si $\models \alpha$ y $\models \alpha \to \beta$, entonces $\models \beta$.

c). Si $\Sigma \models \alpha$ y $\Sigma \models \alpha \to \beta$, entonces $\Sigma \models \beta$.

2. Modus Tollens

a). $\alpha \to \beta, \neg\beta \models \neg\alpha$

b). Si $\models \alpha \to \beta$ y $\models \neg\beta$ entonces $\models \neg\alpha$

c). Si $\Sigma \models \alpha$ y $\Sigma \models \alpha \to \beta$, entonces $\Sigma \models \beta$.

Prueba: **Ejercicio**. †

Una regla de inferencia es o será una "buena regla" en tanto que sea un argumento correcto, es decir, si la conclusión es una consecuencia lógica de las hipótesis. Las reglas *Modus Ponens* y *Modus Tollens* son "buenas reglas":

MP **MT**

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \to \beta \\ \hline \beta \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\beta \\ \alpha \to \beta \\ \hline \neg\alpha \end{array}$$

Veamos otras propiedades.

Proposición$_4$. Sea $\beta \in \Phi(\mathbb{B})$. Así,

1. $\models \beta$ syss $\dot{\forall}\ \alpha \in \Phi(\mathbb{B}),\ \alpha \models \beta$

2. $\models \beta$ syss $\dot{\forall}\ \Sigma \subseteq \Phi(\mathbb{B}),\ \Sigma \models \beta$

Prueba: La parte **1**. se sigue de **2**. Veamos pues, este último.

$\Rightarrow]$ Si β es una tautología, entonces cualquier $\mathbb{B}$–asignación que se dé, en particular a una que satisfaga a un conjunto determinado de fórmulas, satisfacerá a β.

$\Leftarrow]$ En particular se tiene, $A \vee \neg A \models \beta$. Por tanto, cualquier asignación que demos, al satisfacer a esta hipótesis, satisface a β. †

Proposición$_5$. Sea $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$. Así,

1. $\alpha, \neg\alpha \models \beta$ cualquiera sea $\beta \in \Phi(\mathbb{B})$ y

2. α es una contradicción syss $\alpha \models \beta$ para cualquier $\beta \in \Phi(\mathbb{B})$.

Prueba: Sólo probaremos **2**. La primera parte se hará por contrapositiva y la otra será directa.

$\Rightarrow]$ Si para algún β se tiene que $\alpha \not\models \beta$, entonces hay una asignación que satisface a α pero, no así a β. En tal caso, α no es una contradicción.

$\Leftarrow]$ Tenemos como caso particular, $\alpha \models (A \ \& \ \neg A)$. Así, cualquier asignación que satisfaciera a α, tendría que satisfacer a $(A \ \& \ \neg A)$. Por lo tanto, α no es satisfacible y de aqui que α sea contradicción. †

Corolario$_6$. Sea $\gamma \in \Phi(\mathbb{B})$. Así,

$$\gamma \text{ es Contingente syss } \dot{\exists}\ \alpha \in \Phi(\mathbb{B}) \left[\alpha \not\models \gamma\right] \text{ y } \dot{\exists}\ \beta \in \Phi(\mathbb{B}) \left[\gamma \not\models \beta\right]$$

Sabemos que la equivalencia lógica está caracterizada por la doble implicación lógica, también la podemos caracterizar por tener las mismas consecuencias lógicas.

Proposición$_7$. Para $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B})$ se tiene que,

1. $\alpha \equiv \beta$ syss $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$

2. $\alpha \equiv \beta$ syss $\dot{\forall}\ \gamma \in \Phi(\mathbb{B})$, $\alpha \models \gamma$ syss $\beta \models \gamma$

Prueba: Solo falta probar **2**.

$\Rightarrow]$ Supongamos que $\alpha \equiv \beta$. Así, tenemos que $\alpha \models \beta$ y que $\beta \models \alpha$. Ahora consideremos a $\gamma \in \Phi(\mathbb{B})$. Si fuera el caso en que $\alpha \models \gamma$, por la transitividad de la implicación lógica, tendríamos que $\beta \models \gamma$. Análogamente, si $\beta \models \gamma$, tendríamos que $\alpha \models \gamma$.

$\Leftarrow]$ Supongamos que para cualquier $\gamma \in \Phi(\mathbb{B})$, se tiene que $\alpha \models \gamma$ syss $\beta \models \gamma$. Ahora bien, como $\alpha \models \alpha$, tenemos que $\beta \models \alpha$ y como $\beta \models \beta$ también tenemos que $\alpha \models \beta$. Concretando, $\alpha \equiv \beta$. †

La siguiente propiedad nos da una caracterización para la satisfacibilidad de un conjunto de fórmulas.

Proposición$_8$. Sea $\Sigma \subseteq \Phi(\mathbb{B})$. Así,

1. Σ es satisfacible syss hay una $\beta \in \Phi(\mathbb{B})$ tal, que $\Sigma \not\models \beta$.

O, equivalentemente,

2. $\Sigma \models \beta$, para toda $\beta \in \Phi(\mathbb{B})$ syss Σ no es satisfacible

Prueba: Si Σ es satisfacible, entonces ninguna contradicción es consecuencia lógica de él –p.e. $(A \ \& \ \neg A)$. Otro ejemplo, si $\alpha \in \Sigma$, se tiene que $\Sigma \not\models \neg\alpha$ (aquí se necesita que $\Sigma \neq \emptyset$). Otro más, si se tiene que $\Sigma \vDash \beta$, por ser Σ satisfacible, entonces $\Sigma \nvDash \neg\beta$. El "regreso" es inmediato de la definición de $\vDash$. †

Una última propiedad de la consecuencia lógica, que veremos en esta sección y que nos será de gran utilidad para más adelante es,

Proposición$_9$. Sea $\Sigma \cup \{\beta\} \subseteq \Phi(\mathbb{B})$. Así,

1. $\Sigma \nvDash \beta$ syss $\Sigma \cup \{\neg\beta\}$ es satisfacible.

O, equivalentemente,

2. $\Sigma \vDash \beta$ syss $\Sigma \cup \{\neg\beta\}$ no es satisfacible.

Prueba:

$\Sigma \nvDash \beta$ syss $\dot{\exists}\, v \in {}^{\mathbb{B}}2 \left[v^*[\Sigma] = 1 \text{ y } v^*(\beta) \neq 1 \right]$ Def. de $\vDash$

syss $\dot{\exists}\, v \in {}^{\mathbb{B}}2 \left[v^*[\Sigma] = 1 \text{ y } v^*(\neg\beta) = 1 \right]$ Prpds. de v

syss $\dot{\exists}\, v \in {}^{\mathbb{B}}2 \left[v^*[\Sigma \cup \{\neg\beta\}] = 1 \right]$

syss $\Sigma \cup \{\neg\beta\}$ es satisfacible Def. de Sat †

Dos resultados importantes, que no podemos dejar de mencionar, quedan

PENDIENTES:

METATEOREMA DE FINITUD SEMÁNTICO:
Sea $\Sigma \cup \{\alpha\} \subseteq \Phi(\mathbb{B})$. Si $\Sigma \vDash \alpha$, entonces Σ tiene un subconjunto finito, digamos Γ, tal que $\Gamma \vDash \alpha$.

METATEOREMA DE COMPACIDAD:
Si Σ es un conjunto de fórmulas tal, que todo subconjunto finito es satisfacible, entonces él mismo, Σ, es satisfacible.

Solo comentaremos que estos resultados son equivalentes, es decir, se puede probar uno a partir del otro. Nosotros, más adelante, probaremos el metateorema de compacidad y de ahí desprenderemos el de finitud.