Metateorema de Compacidad

En lo que sigue, sean $\Sigma, \Gamma, \Delta, \ldots \subseteq \Phi(\mathbb{B})$ y $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \in \Phi(\mathbb{B})$.

Notación: $\wp_{\omega}(A) = \{B \subseteq A \ / \ B \text{ es finito}\}$.

Definición. Diremos que β es *Consecuencia (Lógica) Finita de* Σ, lo cual denotaremos por $\Sigma \models_f \beta$, syss β es consecuencia lógica de un subconjunto finito de Σ.
En símbolos,

$$\Sigma \models_f \beta \text{ syss } \dot{\exists}\ \Gamma \in \wp_{\omega}(\Sigma) \left[\Gamma \models \beta\right]$$

Osérvese que $\Sigma \not\models_f \beta$ syss $\dot{\forall}\ \Gamma \in \wp_{\omega}(\Sigma) \left[\Gamma \not\models \beta\right]$

Es obvio que si Σ es finito, las nociones de consecuencia y consecuencia finita coinciden. El caso infinito, es el interesante. Tenemos también, gracias a la monotonía de $\models$, que si $\Sigma \models_f \beta$, entonces $\Sigma \models \beta$. Sin embargo la conversa ya no se antoja tan fácil. ¡Es cierta! pero, como veremos, depende del Axioma de Elección –de hecho de uno equivalente, al Lema de Zorn. Una noción intimamente relacionada con la anterior, es:

Definición. Diremos que Σ es *Finitamente Satisfacible, $FinSat$*, syss Todo subconjunto finito de Σ es satisfacible.
En símbolos:

$$\Sigma \text{ es } FinSat \text{ syss } \dot{\forall}\ \Gamma \in \wp_{\omega}(\Sigma) \left[\Gamma \text{ es satisfacible}\right]$$

Claramente, todo conjunto satisfacible es finitamente satisfacible. La conversa, al igual que el caso anterior, no es trivial y tambien depende del axioma de elección, este resultado es muy importante en la lógica y recibe el nombre de *Metateorema de Compacidad.* Pasemos a dar algunas propiedades, encaminadas a la prueba de dicho resultado.

Proposición$_1$.

1. Σ es Sat syss $\dot{\exists}\ \beta \left[\Sigma \not\models \beta\right]$.
2. Σ es $FinSat$ syss $\dot{\exists}\ \beta \left[\Sigma \not\models_f \beta\right]$.

Prueba: Ya se probó **1**, veamos **2**. Para la "ida" basta tomar $\beta \rightleftharpoons (A \ \& \ \neg A)$. Para el "regreso", supongamos que hay un β tal que $\Sigma \not\models_f \beta$ y sea $\Gamma \in \wp_{\omega}(\Sigma)$. Por nuestra suposición y gracias a **1**, tenemos que Γ es satisfacible. Así, Σ es $FinSat$. †

Proposición$_2$.

1. $\Sigma \not\models \beta$ syss $\Sigma \cup \{\neg\beta\}$ es Sat.
2. $\Sigma \not\models_f \beta$ syss $\Sigma \cup \{\neg\beta\}$ es $FinSat$.

Prueba: Ya se probó **1**, veamos **2**.

$\Sigma \not\models_f \beta$	syss	$\dot{\forall}\ \Gamma \in \wp_\omega(\Sigma) \left[\Gamma \not\models \beta\right]$	Def. de $\models_f$
	syss	$\dot{\forall}\ \Gamma \in \wp_\omega(\Sigma) \left[\Gamma \cup \{\neg\beta\}\text{ es } Sat\right]$	Por 1.
	syss	$\dot{\forall}\ \Delta \in \wp_\omega(\Sigma \cup \{\neg\beta\}) \left[\Delta\text{ es } Sat\right]$	
	syss	$\Sigma \cup \{\neg\beta\}$ es $FinSat$	Def. de $FinSat$ †