

# Coloreando Gráficas

## UNA APLICACIÓN DEL METATEOREMA DE COMPACIDAD

**Definición<sub>1</sub>.**  $\mathcal{G}$  es una gráfica sys  $\mathcal{G} = \langle G, R \rangle$  donde

1.  $G \neq \emptyset$
2.  $R \subseteq G \times G$
- a.  $R$  es irreflexiva sobre  $G$  : Para todo  $a \in G$ ,  $\langle a, a \rangle \notin R$
- b.  $R$  es simétrica sobre  $G$  : Para todos  $a, b \in G$ ,  
si  $\langle a, b \rangle \in R$ , entonces  $\langle b, a \rangle \in R$

**Notación:** Sea  $\mathcal{G} = \langle G, R \rangle$  una gráfica.

- A los elementos de  $G$ , les llamaremos *Nodos o Vértices de  $\mathcal{G}$* .
- A  $R$  le llamaremos *el conjunto de Aristas de  $\mathcal{G}$* .
- Si  $\langle a, b \rangle \in R$ , es decir, si  $\langle a, b \rangle$  es una arista, diremos que  $a$  y  $b$  son *Vértices Adyacentes*.

**Definición<sub>2</sub>.**  $\langle G', R' \rangle$  es una *Subgráfica* de la gráfica  $\langle G, R \rangle$  sys

1.  $\emptyset \neq G' \subseteq G$ . Y
2.  $R' \subseteq R$ , es decir, para todos  $a, b \in G'$ ,  $\langle a, b \rangle \in R'$  sys  $\langle a, b \rangle \in R$ .

**Definición<sub>3</sub>.** Sea  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Una  $k$ -*Coloración* de una gráfica  $\mathcal{G}$  es una asignación de  $k$  colores a los vértices de  $\mathcal{G}$  de tal suerte que vértices adyacentes de  $\mathcal{G}$  no tengan el mismo color.

**Ejemplos:**

1. Hay gráficas que no son 3-coloreables.
2. Toda gráfica es 5-coloreable (Teorema “conocido”)

¿Toda gráfica es 4-coloreable?

**Proposición.** (De Bruijn–Erdős, 1951)

Si toda subgráfica finita de una gráfica  $\mathcal{G}$  es  $k$ -coloreable, entonces  $\mathcal{G}$  es  $k$ -coloreable.

La prueba original, usa Inducción Transfinita. Nosotros usaremos el Metaterema

de Compacidad.

**Prueba:** Sea  $\mathcal{G} = \langle G, R \rangle$  una gráfica. Basta ver el caso  $k = 4$ . Consideremos los colores, **Negro**, **Verde**, **Azul** y **Blanco**. Construimos un Lenguaje Formal de Primer Orden como sigue,

$$\text{Sea } \rho = \{N, V, A, B\} \cup \emptyset \cup \{c_a \mid a \in G\}$$

donde,  $\{N, V, A, B\} = \mathcal{P}_1$  y  $\{c_a \mid a \in G\} = \mathcal{C}$ .

Consideremos el lenguaje asociado a  $\rho$ ,  $\mathcal{L}_\rho$ . Ahora, sus fórmulas,  $FRM_\rho$ . De éstas tomamos los bloques,  $\mathbb{B}_\rho$ , y finalmente reconstruimos las fórmulas a partir de estos,  $\Phi(\mathbb{B}_\rho)$ .

Tengamos en mente que la gráfica  $\mathcal{G}$  la podemos ver como una  $\rho$ -interpretación. Donde  $N^{\mathcal{G}} = \mathbf{Negro}$ ,  $V^{\mathcal{G}} = \mathbf{Verde}$ ,  $A^{\mathcal{G}} = \mathbf{Azul}$ ,  $B^{\mathcal{G}} = \mathbf{Blanco}$  y para cada  $a \in G$ ,  $c_a^{\mathcal{G}} = a$ .

Ahora, definimos  $\Sigma \subseteq \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ , como sigue:

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$$

donde:

**a).** (Cada vértice tiene al menos un color)

$$\Sigma_1 = \{N(c_a) \vee V(c_a) \vee A(c_a) \vee B(c_a) \mid a \in G\}$$

**b).** (Cada vértice tiene a lo más un color)

$$\begin{aligned} \Sigma_2 = & \left\{ \neg(N(c_a) \ \& \ V(c_a)) \mid a \in G \right\} \\ & \cup \left\{ \neg(N(c_a) \ \& \ A(c_a)) \mid a \in G \right\} \\ & \cup \left\{ \neg(N(c_a) \ \& \ B(c_a)) \mid a \in G \right\} \\ & \cup \left\{ \neg(V(c_a) \ \& \ A(c_a)) \mid a \in G \right\} \\ & \cup \left\{ \neg(V(c_a) \ \& \ B(c_a)) \mid a \in G \right\} \\ & \cup \left\{ \neg(A(c_a) \ \& \ B(c_a)) \mid a \in G \right\} \end{aligned}$$

c). (Vértices adyacentes no tienen el mismo color).

$$\begin{aligned}\Sigma_3 = & \left\{ \neg(N(c_a) \ \& \ N(c_b)) \ / \ a, b \in G \text{ y } \langle a, b \rangle \in R \right\} \\ & \cup \left\{ \neg(V(c_a) \ \& \ V(c_b)) \ / \ a, b \in G \text{ y } \langle a, b \rangle \in R \right\} \\ & \cup \left\{ \neg(A(c_a) \ \& \ A(c_b)) \ / \ a, b \in G \text{ y } \langle a, b \rangle \in R \right\} \\ & \cup \left\{ \neg(B(c_a) \ \& \ B(c_b)) \ / \ a, b \in G \text{ y } \langle a, b \rangle \in R \right\}\end{aligned}$$

**Af<sub>1</sub>**. Si  $\Sigma$  es satisfacible, entonces  $\mathcal{G}$  es 4-coloreable.

Sea  $\nu$  una asignación de valores de verdad a los bloques, es decir  $\nu \in {}^{\mathbb{B}}2$ , tal que satisfaga a  $\Sigma$ . Pintemos ahora la gráfica con ayuda de  $\nu$ .

Sea  $a \in G$ , Fijémonos en  $N(c_a), V(c_a), A(c_a), B(c_a) \in \mathbb{B}$ . La asignación  $\nu$  les da el valor de 1 o de 0 a cada una. Pero solo a una de ellas le puede dar el valor de 1 y a las otras forzosamente, el valor de 0. Esto se debe a que  $\nu$  satisface a  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ .

La coloración de  $\mathcal{G}$  es la inducida por la interpretación aplicada al único bloque que toma el valor de 1 bajo la asignación. Por ejemplo, si  $a \in G$ , nos fijamos en su nombre,  $c_a$ , y en la letra predicativa, digamos  $P \in \mathcal{P}_1$ , tal que la asignación  $\nu$  le da el valor de 1 al bloque  $P(c_a)$ , es decir  $\nu(P(c_a)) = 1$  y pintamos a  $a$  del color  $P^{\mathcal{G}}$ .

Hasta ahora podemos pintar cada vértice de un solo color. El hecho de que vértices adyacentes no tienen el mismo color, se debe a que  $\nu$  satisface a  $\Sigma_3$ .

**Af<sub>2</sub>**.  $\Sigma$  es finitamente satisfacible.

Sea  $\Gamma \subseteq \Sigma$  finito. Veamos que  $\Gamma$  es satisfacible. Consideremos los siguientes conjuntos,

$$\begin{aligned}\mathbb{P} &= \left\{ P(C_a) \in \mathbb{B}_p \ / \ P \in \mathcal{P}_1 \text{ y } P(C_a) \text{ aparece en } \alpha \text{ para algún } \alpha \in \Gamma \right\} \\ G' &= \left\{ a \in G \ / \ P(C_a) \in \mathbb{P} \right\} \\ \text{y } R' &= \left\{ \langle a, b \rangle \in R \ / \ a, b \in G' \right\}\end{aligned}$$

Dado que  $\mathbb{P}$  es finito, también lo es  $G'$ . Resultando que  $\mathcal{G}' = \langle G', R' \rangle$  es una subgráfica **finita**, de la gráfica  $\langle G, R \rangle$ .

Por hipótesis,  $\mathcal{G}'$  es 4-coloreable. Supongamos pues, que ya la tenemos coloreada y definimos en base a ello una asignación de valores de verdad para todos los

bloques. Sea

$$v : \mathbb{B}_\rho \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\text{si } A \in \mathbb{B}_\rho, v(s) = \begin{cases} 1 & \text{Si } A \Leftrightarrow P(C_a) \text{ con } P(C_a) \in \mathbb{P} \text{ y } a \text{ está pintado del color } P^G \\ \text{ó} & \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obsérvese que para  $a \in G'$  y  $P \in \mathcal{P}_1$  se tiene:

$$v(P(C_a)) = 1 \text{ si } a \text{ está pintado del color } P^G \dots\dots\dots(*)$$

Veamos que  $v$  Satisface a  $\Gamma$ , e.d. si  $\alpha \in \Gamma$ , entonces  $v^*(\alpha) = 1$ . Tenemos 3 casos posibles:

- i)  $\alpha \in \Sigma_1$  : Tenemos que  $v^*(\alpha) = 1$ , pues cada nodo de  $G'$  está pintado de algún color.
- ii)  $\alpha \in \Sigma_2$  : Aquí,  $v^*(\alpha) = 1$  pues los nodos de  $G'$  no están pintados de dos colores. Y
- iii)  $\alpha \in \Sigma_3$  : Ya que nodos adyacentes en la gráfica  $G'$  no tienen la misma coloración,  $v^*(\alpha) = 1$ .

Finalmente, si aplicamos el **MetaTeorema de Compacidad** a nuestra **Af<sub>2</sub>** tenemos que es cierto el antecedente de la **Af<sub>1</sub>** y por tanto tenemos que la gráfica  $G$  es 4-coloreable.

