Para la prueba del Metateorema de compacidad, necesitamos introducir otra noción más:

Definición. Un conjunto de fórmulas, Σ, es *Maximal Finitamente Satisfacible,* MFS, syss es maximal, respecto a la $\subseteq$, en la familia de los conjuntos finitamente satisfacibles de $\Phi(\mathbb{B})$. En símbolos: Σ es MFS syss

i) Σ es finitamente satisfacible, y

ii) Si $\Delta \subseteq \Phi(\mathbb{B})$ tal que Δ es finitamente satisfacible y $\Delta \supseteq \Sigma$, entonces $\Delta = \Sigma$.

Los conjuntos MFS, tienen propiedades muy importantes, como ser cerrados bajo consecuencias finitas y bajo equivalencia lógica.

Proposición$_3$. Sea Σ un conjunto MFS.

$$\text{Si } \Sigma \models_f \beta, \text{ entonces } \beta \in \Sigma$$

Prueba: Supongamos que $\Sigma \models_f \beta$ y consideremos $\Gamma = \Sigma \cup \{\beta\}$. Si Γ no fuera $FinSat$, por la proposición anterior, tendríamos que $\Sigma \models_f \neg\beta$. Esto junto con nuestra suposición, contradiría el hecho de que Σ fuera $FinSat$. Resumiendo, tenemos que Γ es $FinSat$ y $\Gamma \supseteq \Sigma$, ahora por la maximalidad de Γ, obtenemos que $\Sigma = \Gamma$ y por tanto, $\beta \in \Sigma$. †

Un resultado inmediato es el siguiente,

Corolario$_4$. Si Σ es un conjunto MFS, entonces

$$\text{Si } \Sigma \models_f \beta \text{ y } \beta \equiv \beta', \text{ entonces } \beta' \in \Sigma$$

Otras dos propiedades que nos interesan son:

Proposición$_5$. Sea Σ un conjunto MFS.

$$\alpha \notin \Sigma \text{ syss } \neg\alpha \in \Sigma$$

Prueba:

$\Leftarrow$] Si $\neg\alpha \in \Sigma$ y $\alpha \in \Sigma$, tendríamos que $\{\neg\alpha, \alpha\} \in \wp_\omega(\Sigma)$ el cual no es satisfacible ∇ !!

○

$\Rightarrow$] Supongamos que $\alpha \notin \Sigma$. Así $\Sigma \subsetneq \Sigma \cup \{\alpha\}$ y por la maximalidad de Σ, tenemos que $\Sigma \cup \{\alpha\}$ no es $FinSat$. Ahora, por la proposición$_{2.2}$, obtenemos que $\Sigma \models_f \neg\alpha$ y como Σ es cerrado bajo consecuencias finitas, $\neg\alpha \in \Sigma$. †

Este resultado nos asegura que en un MFS se encuentra una fórmula o su negación, pero no ambas, por lo que el conjunto de fórmulas queda dividido en dos partes: Las que le pertenecen por un lado y las negaciones de éstas por el otro. La siguiente proposición nos asegura que cuando se tiene que una disyunción de dos fórmulas pertenece al maximal, es porque uno de ellos ya pertenecía.

Proposición$_6$. Si Σ es un conjunto MFS, entonces

$$\alpha \vee \beta \in \Sigma \text{ syss } \alpha \in \Sigma \text{ o } \beta \in \Sigma$$

Prueba: Sea Σ un conjunto MFS.

$\Rightarrow$] Procederemos por reducción a lo absurdo. Supongamos que $\alpha \vee \beta \in \Sigma$ y que $\alpha,\ \beta \notin \Sigma.$ Así, por la proposición anterior, $\neg\alpha,\ \neg\beta \in \Sigma;$ pero entonces $\{\alpha \vee \beta,\ \neg\alpha,\ \neg\beta\} \in \wp_{\omega}(\Sigma)$ que no es satisfacible y de aquí que Σ no es un $FinSat$ ∇ !!! $\circ$

$\Leftarrow$] Por contrapositiva. Supongamos que $\alpha, \beta \in \Sigma$ y que $\alpha \vee \beta \notin \Sigma.$ Así, por la proposición anterior, $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Sigma.$ Ahora bien, teniendo en cuenta el **Corolario$_4$**, tenemos que $(\neg\alpha\ \&\ \neg\beta) \in \Sigma,$ de aquí que $\neg\alpha \in \Sigma$ y $\neg\beta \in \Sigma.$ Finalmente, $\alpha \notin \Sigma$ y $\beta \notin \Sigma.$ †

Posiblemente la propiedad más importante de los MFS es que es satisfacible, para ello:

Definición. Para cada $\Sigma \subseteq \Phi(\mathbb{B}),$ definimos una asignación de valores de verdad a los bloques, $v_\Sigma,$ como sigue:

$$v_\Sigma : \mathbb{B} \to \{0,\ 1\}$$

$$\dot{\forall}\ P \in \mathbb{B},\ v_\Sigma(P) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad P \in \Sigma \\ \\ 0 & \text{si} \quad P \notin \Sigma \end{cases}$$

OjO: $v_\Sigma(P) = 1$ syss $P \in \Sigma,$ para cualquier $P \in \mathbb{B}.$

Lema$_7$. Si Σ es MFS, la asignación correspondiente, $v_\Sigma,$ tiene la propiedad de que: Para cualquier $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}),$ cumple con,

$$v^*_\Sigma(\alpha) = 1 \text{ syss } \alpha \in \Sigma \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad *(\alpha)$$

Prueba: Esto lo probaremos usando inducción sobre la formación de fórmulas de $\Phi(\mathbb{B}).$

I] Sea $P \in \mathbb{B},$ veamos que $*(P).$

$v^*_\Sigma(P) = 1$	syss	$v_\Sigma(P) = 1$	Def. de v^* y $P \in \mathbb{B}$
	syss	$P \in \Sigma$	Por **OjO**

II] Sean $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B})$ y supongamos inductivamente que $*(\alpha)$ y $*(\beta)$.

a) Veamos que $*(\neg\alpha)$:

$v_\Sigma^*(\neg\alpha) = 1$	syss	$v_\Sigma^*(\alpha) \neq 1$	Prpd. de v
	syss	$\alpha \notin \Sigma$	H.I.
	syss	$\neg\alpha \in \Sigma$	Prop$_5$

b). Hay que probar que $*(\alpha \vee \beta)$:

$v_\Sigma^*(\alpha \vee \beta) = 1$	syss	$v_\Sigma^*(\alpha) = 1$ o $v_\Sigma^*(\beta) = 1$	Prpd. de v
	syss	$\alpha \in \Sigma$ o $\beta \in \Sigma$	H.I.
	syss	$\alpha \vee \beta \in \Sigma$	Prop$_6$

Las propiedades $*(\alpha \ \& \ \beta)$, $*(\alpha \to \beta)$ y $*(\alpha \leftrightarrow \beta)$ no se necesitan probar, ya que tenemos a la mano el Corolario$_4$. †

Tarea. Terminar "a pie" la demostración anterior.

Proposición$_8$. Todo conjunto Maximal Finitamente Satisfacible es Satisfacible.