Lema de Zorn (**LZ**)

Si en un conjunto parcialmente ordenado, toda cadena está acotada superiomente, entonces el conjunto tiene un elemento maximal.

Definición$_1$. Sea R una relación y A un conjunto. Diremos que,

1. R es *Reflexiva sobre* A syss $\forall x \in A \left(x\ R\ x\right)$.
2. R es *Irreflexiva sobre* A syss $\forall x \in A \neg\left(x\ R\ x\right)$.
3. R es *Antisimétrica sobre* A syss $\forall x,y \in A \left[xRy\ \&\ yRx \rightarrow x = y\right]$.
4. R es *Asimétrica sobre* A syss $\neg\exists x,y \in A \left[xRy\ \&\ yRx\right]$ o equivalentemente, $\forall x,y \in A \left[xRy \rightarrow \neg(yRx)\right]$.
5. R es *Transitiva sobre* A syss $\forall x,y,z \in A \left[xRy\ \&\ yRz \rightarrow xRz\right]$.

Definición$_2$.

- R es un *Orden Parcial Reflexivo sobre* A syss
  R es reflexivo, antisimétrico y transitivo sobre A.
- R es un *Orden Parcial Estricto sobre* A syss
  R es irreflexivo, asimétrico y transitivo sobre A.

Definición$_3$. $\langle A,\ R\rangle$ es un *COnjunto Parcialmente Ordenado* syss

1. $R \subseteq A \times A$ y
2. R ordena parcialmente (en forma reflexiva o estricta) a A.

Usaremos la siguiente notación:

$$COPO = \left\{\langle A,R\rangle\ /\ \langle A,R\rangle \text{ es un conjunto parcialmente ordenado}\right\}$$

OjO: A cada orden parcial reflexivo le corresponde uno estricto y viceversa. Por ello solo se habla de “orden parcial” sin especificar si es uno u otro. Y, en general, cuando se quiere hablar del estricto se usa el símbolo $<$, en cambio si se refiere uno al reflexivo, se usa este otro símbolo $\leq$.

Definición$_4$. Sea $\left\langle A,\ \leq\right\rangle \in COPO$ y sean $B \subseteq A$ y $b \in A$.

1. b es un $\leq$*–Mínimo de* B syss $b \in B$ y $\forall x \in B(b \leq x)$

2. b es un $\leq$*–Minimal de* B syss $b \in B$ y $\neg\exists x \in B(x < b)$ o, $\forall x \in A\ (x < b \rightarrow x \notin B)$ o, $\forall x \in B(x \leq b \rightarrow x = b)$

3. b es un $\leq$*–Máximo de* B syss $b \in B$ y $\forall x \in B(x \leq b)$.

4. b es un $\leq$*–Maximal de* B syss $b \in B$ y $\neg\exists x \in B(b < x)$ o, $\forall x \in A\ (b < x \rightarrow x \notin B)$ o, $\forall x \in B(b \leq x \rightarrow x = b)$

Proposición . Los elementos mínimos y máximos de un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado, si es que existen, son únicos.

Notación: Sea $\langle A,<\rangle \in COPO$ y sean $B,\ C \subseteq A$.

1. $min_< B$

2. $max_< C$

Definición$_5$. Sea $\langle A,<\rangle \in COPO$ y sean $B \subseteq A$ y $a \in A$.

1. a es *Cota Inferior de* B syss $\forall x \in B(a \leq x)$

2. a es *Infimo de* B syss $a = max_<\left\{w \in A\ /\ w \text{ es cota inferior de b}\right\}$.

Notación: Si éste existe, $inf_< B$.

3. a es *Cota Superior de* B syss $\forall x \in B(x \leq a)$.

4. a es *Supremo de* B syss $a = min_<\left\{w \in A\ /\ w \text{ es cota inferior de b}\right\}$.

Definición$_6$. Sea $\langle A,<\rangle \in COPO$. Un conjunto B *es* o *forma una Cadena en* A syss

1. $B \subseteq A$. Y

2. $\forall x,y \in B\left[x < y\ \vee\ x = y\ \vee\ y < x\right]$

Proposición(ZF). AE $\Leftrightarrow$ LZ