Proposición$_9$(AE). Todo conjunto Finitamente Satisfacible se puede extender a un Maximal Finitamente Satisfacible. En símbolos:

Si Σ es $FinSat$, entonces hay un $\Delta \subseteq \Phi(\mathbb{B})$ tal que Δ es MFS y $\Delta \supseteq \Sigma$.

Prueba: Sea Σ un conjunto $FinSat$. Consideremos a:

$$W = \left\{ \Gamma \subseteq \Phi(\mathbb{B}) \ / \ \Gamma \text{ es } FinSat \text{ y } \Gamma \supseteq \Sigma \right\}$$

Obsérvese que $W \neq \emptyset$ y que la relación $\subseteq$, lo ordena parcialmente; así $\langle W, \subseteq \rangle \in COPO$. Veamos que toda cadena de W está acotada superiormente. Sea $\left\{ \Gamma_i \in W \ / \ i \in I \right\}$ una cadena en W, es decir: si $i, j \in I$ con $i \neq j$, entonces $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ o $\Gamma_j \subseteq \Gamma_i$. Ahora consideremos a

$$\Gamma = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$$

Afirmamos que Γ es un elemento de W, el cual es una cota superior de la cadena:

•) $\Gamma \subseteq \Phi(\mathbb{B})$: Pues $\dot{\forall}\ i \in I$, $\Gamma_i \subseteq \Phi(\mathbb{B})$.

••) $\Gamma \supseteq \Sigma$: Pues $\dot{\forall}\ i \in I$, $\Gamma_i \supseteq \Sigma$.

•••) Γ es $FinSat$: Sea $\Gamma' \in \wp_\omega(\Gamma)$. Puesto que Γ' es finito y Γ es una cadena, hay un $i_0 \in I$ tal, que $\Gamma' \subseteq \Gamma_{i_0}$. Ahora, puesto que Γ_{i_0} es $FinSat$, resulta que Γ' es Sat. Con esto tenemos que $\Gamma \in W$, falta ver que es cota superior:

••••) $\dot{\forall}\ i \in I$, $\Gamma_i \subseteq \Gamma$: esto es inmediato de las propiedades de la $\cup$.

Finalmente, por el **Lema de Zorn**, tenemos que W tiene un elemento maximal, digamos Δ, así, $\Sigma \subseteq \Delta \subseteq \Phi(\mathbb{B})$ con Δ un MFS. †

Como un corolario a todo nuestro trabajo, tenemos como resultado:

Meta–Teorema de Compacidad:

Todo conjunto Finitamente Satisfacible, es Satisfacible.

Como sabemos el Lema de Zorn (**LZ**) es equivalente al Axioma de Elección (**AE**); nosotros usamos el **LZ** para probar el Metateorema de Compacidad (**MTC**). Las preguntas que surgen inmediatamente son ¿se necesita en realidad al **AE** para probar el **MTC**? —no será que estamos matando hormigas a cañonazos— y en el caso en que sí lo fuera ¿no serán equivalentes? La respuesta es **NO**, a las dos preguntas. Resulta ser que el **MTC** es una *forma débil* del **AE**. Pasemos a explicar esto brevemente.

En primer lugar, el **MTC** es —al igual que el **AE**— un enunciado indecidible; indecidible desde las bases de la Teoría de Conjuntos, desde la teoría de Zermelo–Fraenkel (**ZF**). Por tanto, para poder tenerlo, necesitamos propiedades más fuertes que las que otorga **ZF**. En segundo término, —cosa que ya tenemos— desde **ZF**, el **AE** implica el **MTC**. Y por último, se puede demostrar que **NO** se puede probar —con estas mismas bases, **ZF**— que el **MTC** implique el **AE**.

El **MTC** es equivalente, módulo **ZF**, a otros enunciados como por ejemplo, el Teorema del Ultrafiltro (todo filtro propio, se puede extender a un ultrafiltro) y la versión dual, el Teorema del Ideal Primo (todo ideal se puede extender a un ideal primo).

Un último comentario es sobre el nombre de este teorema, "Compacidad". Se le llama así porque es equivalente a que un "cierto" espacio topológico sea compacto.

Cerramos este capítulo formalizando el resultado, además, pagando la promesa hecha al principio del mismo y también, ligamos la noción semánticas de *Consecuencia Lógica* ($\models$) con la sintáctica de *Deducción Formal* ($\vdash_L$) en el sistema L (Mendelson).

Proposición$_{10}$.

1. Todo conjunto de fórmulas, de $\Phi(\mathbb{B})$, Satisfacible es Finitamente Satisfacible.

2. (**LZ**) Todo conjunto de fórmulas, de $\Phi(\mathbb{B})$, Finitamente Satisfacible es Satisfacible (**MTC**).

Prueba: **1**. es inmediata de las definiciones y **2**. se sigue de aplicar primeramente la **Proposición$_9$**, para continuar con la **Proposición$_8$**. †

Proposición$_{11}$.

1. Si $\Sigma \models_f \beta$, entonces $\Sigma \models \beta$.

2. (**MTC**) Si $\Sigma \models \beta$, entonces $\Sigma \models_f \beta$. (Metateorema de Finitud Semántico)

Prueba: El inciso **1**. es inmediato de las definiciones, veamos **2**. Esta propiedad la estableceremos por contrapositiva:

$\Sigma \not\models_f \beta$	syss	$\Sigma \cup \{\neg\beta\}$ es *FinSat*	**Prop$_{2.2}$**
	ent	$\Sigma \cup \{\neg\beta\}$ es *Sat*	**MTC**
	syss	$\Sigma \not\models \beta$	**Prop$_{2.1}$** †

Sabemos que el sistema axiomático de Mendelson, L, es Correcto –todo teorema formal de L es una tautología- y Completo semanticamente, respecto a las tautologías –toda tautología es un teorema formal. Estos resultados los podemos nombrar como el Metateorema de Correctud-Completud, en símbolos:

$\vdash_L \alpha$ syss $\models \alpha$ .... (**MTC-C**)

Finalmente tenemos el siguiente resultado,

Proposición$_{12}$.

1. Si $\Sigma \vdash_L \beta$, entonces $\Sigma \models \beta$.
2. (**MTC**) Si $\Sigma \models \beta$, entonces $\Sigma \vdash_L \beta$.

Prueba: Para **1**. la prueba es similar a la del metateorema de correctud: basta ver que la única regla de inferencia, Modus Ponens, preserva la propiedad de ser Verdad. Veamos **2**.

$\Sigma \models \beta$	ent	$\Sigma \models_f \beta$	**Proposición$_{11.2}$** (**MTC**)
	syss	$\dot{\exists}\ \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \Sigma,\ \alpha_1,\ldots,\alpha_n \models \beta$	Def. de $\models_f$
	syss	$\models (\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow (\ldots \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta)\ldots)))$	Propd. de $\models$
	syss	$\vdash_L (\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow (\ldots \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta)\ldots)))$	**MTC-C**
	syss	$\alpha_1,\ldots,\alpha_n \vdash_L \beta$	**MTD** y **MP**
	syss	$\Sigma \vdash_L \beta$	Lema de Finitud (sintáctico)

†

Este resultado es conocido bajo el nombre del **Metateorema de Correctud–Completud Extendido**.

†