Lógica Matemática I. Tarea-Examen I.

Prof. Rafael Rojas Barbachano.
Ayte. Jorge Alan Morales Morillón.
Ayte. Adrián Alberto de Flon Gasca.

28 - 02 - 2016

1. Estructura y modelos de los Sistemas Axiomáticos

1.1. (1pto.) Haga ver que un enunciado de un sistema axiomático es verdadero, en un modelo, si y solo si su negación es falsa, en dicho modelo.

1.2. (1pto.) Considérese un conjunto $\boldsymbol{\kappa}$ de elementos indefinidos que representaremos con minúsculas, y designaremos por $\boldsymbol{R}$, una relación binaria indefinida (es decir una relación que conecta a dos elemenrtos de $\boldsymbol{\kappa}$) que puede o no verificarse entre un par de elementos de $\boldsymbol{\kappa}$. Si el elemento a de $\boldsymbol{\kappa}$ se relaciona con el elemento b de $\boldsymbol{\kappa}$ por la relación $\boldsymbol{R}$, escribiremos $a\boldsymbol{R}b$. Ahora admitamos los cuatro siguientes postulados referentes a los elementos de $\boldsymbol{\kappa}$ y a la relación binaria $\boldsymbol{R}$.

- P_1: Si a y b son elementos distintos de $\boldsymbol{\kappa}$, entonces $a\boldsymbol{R}b$ ó bien $b\boldsymbol{R}a$.
- P_2: Si a y b son elementos cualesquiera de $\boldsymbol{\kappa}$ tales que $a\boldsymbol{R}b$, entonces a es distinto de b.
- P_3: Si a, b, c son tres elementos cualesquiera de $\boldsymbol{\kappa}$ tales que $a\boldsymbol{R}b$ y $b\boldsymbol{R}c$, entonces $a\boldsymbol{R}c$.
- P_4: $\boldsymbol{\kappa}$ consiste de 4 elementos distintos.

Dedúzcanse los seis siguientes teoremas de los cuatro postulados anteriores.

- T_1: Si $a\boldsymbol{R}b$, entonces no tenemos que $b\boldsymbol{R}a$.
- T_2: Si $a\boldsymbol{R}b$, entonces no hay un c tal que $c\boldsymbol{R}a$ y $b\boldsymbol{R}c$.
- T_3: Hay exactamente un elemento de $\boldsymbol{\kappa}$ que no está relacionado, bajo $\boldsymbol{R}$, con ningún elemento de $\boldsymbol{\kappa}$.

Definición1: Si $b\boldsymbol{R}a$, decimos que $a\boldsymbol{D}b$.

- T_4: Si $a\boldsymbol{D}b$ y $b\boldsymbol{D}c$, entonces $a\boldsymbol{D}c$.

Definición2: Si $a\boldsymbol{R}b$ y no hay ningún elemento c tal que también $a\boldsymbol{R}c$ y $c\boldsymbol{R}b$, entonces decimos que $a\boldsymbol{F}b$.

- T_5: Si $a\boldsymbol{F}c$ y $b\boldsymbol{F}c$, entonces a y b son idénticos.
- T_6: Si $a\boldsymbol{F}b$ y $b\boldsymbol{F}c$, entonces no tenemos que $a\boldsymbol{F}c$.

2. Consistencia

2.1. (1pto.) Establézcase la concistencia absoluta del conjunto de postulados del ejercicio **1.2.** por medio de cada uno de los siguientes modelos:

a) Supóngase que $\boldsymbol{\kappa}$ conciste de un hombre, su padre, el padre de su padre y el padre del padre de su padre, e interpretemos $a\boldsymbol{R}b$ por: a es un antecesor de b.

b)Supóngase que $\boldsymbol{\kappa}$ conciste de cuatro puntos distintos en una recta horizontal e interpretemos $a\boldsymbol{R}b$ por: a está a la izquierda de b.

c) Supóngase que $\boldsymbol{\kappa}$ conciste de cuatro enteros 1, 2, 3, 4 e interpretemos $a\boldsymbol{R}b$ por: $a<b$.

Tradúzcanse los enunciados de los teoremas y definiciones del sistema a las interpretaciones anteriores.

2.2. (1pto.) Sea **P** un conjunto de postulados de un sistema axiomático **L**. Conteste:

a) Si σ es un enunciado de **L** y **P** es inconcistente, ¿Será inconcistente $\mathbf{P} \cup \{\sigma\}$?

b) Si σ es un enunciado de **L** y **P** no tiene modelos, ¿Tendrá modelos $\mathbf{P} \cup \{\sigma\}$?

c) Si ϱ es un postulado de **P** y **P** no tiene modelos, ¿Tendrá un modelo **P** - $\{\varrho\}$?

d) Si ϱ es un postulado de **P** y **P** es inconcistente, ¿Será inconcistente **P** - $\{\varrho\}$?

De pruebas y contraejemplos.

3. Independencia

3.1. (1pto.) Una estrucutura algebraica se dice que es un *Sistema de Peano*, si es modelo del siguiente sistema axiomaático:

Términos primitivos:

a) Un conjunto K de elementos no definidos.

b) Una función $S : K \to K$, no definida.

Postulados:

P_1: Si $S(x) = S(y)$ entonces $x = y$.

P_2: Existe un elemento z tal que $z \neq S(x)$ para cualquier x.

P_3: Si A es un subconjunto de K con las propiedades:

- **a)** $z \in A$ (z el elemento de P_2).
- **b)** Si para cualquier $x \in A$ se tiene que $S(x) \in A$, entonces $S = K$.

Demuestre que este sistema es consistente relativamente (a alguna estructura familiar) y que sus postulados son independientes.

3.2. (1pto.) Establézcase la independencia del conjunto de postulados del ejercicio **1.2.**

4. Completez

4.1. (1pto.) ¿Si dos sistemas tienen el mismo número de elementos ellos son isomorfos? Demuestra o da un contraejemplo.

4.2. (1pto.) Demuestre que el sistema axiomático dado en el ejercicio **1.2.** es categórico y por tanto completo.

5. Random

5.1. (1pto.) Sean **S1**, **S2**, **S3** sistemas axiomáticos, tales que **S1** es modelo de **S2** para alguna interpretación de los términos primitivos, **S2** es modelo de **S3** para alguna interpretación de los terminos primitivos de **S2**. Demuestra que**S1** es modelo de **S3** bajo alguna interpretación.

6. Términos y Fórmulas Atómicas

6.1. (1pto.) Dado ρ un tipo de semejanza definimos de manera recursiva:

- Para cada variable x_i, $sbte(x_i) = \emptyset$.
- Para cada símbolo de constante $c_i \in \rho$, $sbte(c_i) = \emptyset$.
- Si $\tau_1, ..., \tau_n \in TRM_\rho$ y $f \in \rho$ es un símbolo funcional de aridad n,

$$sbte(f(\tau_1, .., \tau_n)) = \{\tau_1, .., \tau_n\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} sbte(\tau_i)$$

Pruebe que *sbte* le asigna a cada término un único conjunto de términos, es decir, que es una función.

6.2. (1pto.) Sea $\rho = \{f_1, f_2\} \cup \{c\}$ un tipo de semejanza con $f_1 \in \mathscr{F}_1$ y $f_2 \in \mathscr{F}_2$, $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Q}, \cdot, \_^{-1}, 1 \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Z}, +, -\_, 0 \rangle$ interpretaciones para ρ.

- Asignaciones para $\mathfrak{A}$
  - $s_1(i) = \frac{1}{i+1}$
  - $s_2(i) = \frac{i}{i+2}$
  - $s_3(i) = \frac{i^2}{2}$
- Asignaciones para $\mathfrak{B}$
  - $s_1(i) = i + 28$
  - $s_2(i) = i$
  - $s_3(i) = \begin{cases} i & \text{si } i = 2j \text{ para alguna} j \in \mathbb{N} \\ -i & \text{si } i = 2j+1 \text{ para alguna} j \in \mathbb{N} \end{cases}$

Interpreta cada uno de los siguientes términos en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ con cada una de las asignaciones antes definidas.

- $\tau_1 \rightleftharpoons f_2(x_3, f_2(x_0, f_1(f_1(x_1))))$
- $\tau_2 \rightleftharpoons f_1(f_2(f_1(f_1(x_2)), f_1(f_1(x_8))))$

- $\tau_3 \rightleftharpoons f_2(f_1(f_2(x_{28}, f_1(c))), f_2(c, c))$
- $\tau_4 \rightleftharpoons f_2(f_2(f_1(x_1), c), f_1(c))$

Ya con las interpretaciones de los términos diga si las siguientes fórmulas atómicas son verdaderas en cada estructura con cada asignación:

$$\tau_1 \approx \tau_2$$

$$\tau_1 \approx \tau_3$$

$$\tau_3 \approx \tau_4$$