Lógica Matemática I. Tarea-Examen III.

Prof. Rafael Rojas Barbachano.
Ayte. Jorge Alan Morales Morillón.
Ayte. Adrián Alberto de Flon Gasca.

15 - 05 - 2016

1. Álgebras de Boole

2 pts. Sea $\boldsymbol{A}$ un conjunto con al menos dos elementos. Entonces son equivalentes:

a) $\boldsymbol{A}$ es una álgebra de boole.

b) $\mathfrak{A} = \langle \boldsymbol{A}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$

$$\text{Donde} \begin{cases} \wedge : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{A} \\ \vee : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{A} \\ \neg : \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{A} \\ 0, 1 \text{ son elementos distinguidos.} \end{cases}$$

Satisfacen los siguientes Axiómas:

1) Conmutatividad $\quad x \wedge y = y \wedge x \quad \text{y} \quad x \vee y = y \vee x$
2) Asociatividad $\quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \quad \text{y} \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
3) Idempotencia $\quad x \wedge x = x = x \vee x$
4) Ley de absorción $\quad x \wedge (y \vee x) = x$
5) Distributividad $\quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
6) Neutro de $\wedge$ $\quad x \wedge 1 = x$
7) No contradicción y tercero excluido $\quad \neg x \wedge x = 0 \quad \text{y} \quad \neg x \vee x = 1$

2. Conjunto Mínimo de Conectivos

2 pts. Pruebe las siguientes afirmaciones:

a) Los conjuntos de conectivos $\{\neg\}, \{\&\}, \{\vee\}, \{\rightarrow\}, \{\leftrightarrow\}, \{\neg, \leftrightarrow\}$ no son completos.

b) Cualquier conectivo ternario es expresable en terminos de conectivos binarios y de la negación.

3. Equivalencia e Implicación Lógica

1 pts. Sean $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B})$

- $\alpha \equiv \beta$ sii $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in \mathscr{T}_{\mathbb{B}}$
- $\alpha \models \beta$ sii $(\alpha \rightarrow \beta) \in \mathscr{T}_{\mathbb{B}}$

4. Fórmas Normales

2 pts. Pruebe los siguientes enunciados:

- Por inducción sobre formación de formulas, prueba que toda fórmula es lógicamente equivalente a una que tiene las mismas letras proposicionales, cuyos únicos conectivos son la negación, la disyunción y la conjunción, tal que la negación sólo afectan a las letras proposicionales. (Toda fórmula es equivalente a una Forma Normal).
- Toda fórmual es lógicamente equivalente a otra escrita en Forma Normal Disyuntiva y que tiene las mismas letras proposicionales.

5. Variables libres y acotadas

2 pts. Recordemos que una ocurrencia de una variable x es acotada en una fórmula α si y sólo si dicha ocurrencia es la variable de un cuantificador "$\forall x$" (o "$\exists x$") en β, o dicha ocurrencia está en el alcance del cuantificador "$\forall x$" (o "$\exists x$"). En otro caso, se dice que la ocurrencia es libre. Sin embargo es posible dar una definición recursiva de que una variable sea libre en una fórmula:

- α es atómica y x ocurre en α.
- Si $\alpha \leftrightharpoons (\neg\beta)$ y la ocurrencia de x en β es libre.
- Si $\alpha \leftrightharpoons (\beta \to \gamma)$ y la ocurrencia de x en β es libre o la ocurrencia de x en γ es libre.
- Si $\alpha \rightleftharpoons (\forall z\beta)$ y $z \neq x$ y la ocurrencia de x en β es libre.

Demuestre que las dos definiciones son equivalentes.

6. Random

3 pts. Sea L_ρ un lenguaje formal de primer orden, consderemos $\Phi(\mathbb{B}_\rho)$ los bloques de tipo rho.

Sea $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$. Consideremos la siguiente clase de equivalencia.

- $[\alpha] = \{\beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho) : \beta \equiv \alpha\}$

Sean $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)/_\equiv$. Consideremos el siguiente orden entre las clases de equivalencia antes mencionadas.

- $[\alpha] \leq [\beta]$ sii $\alpha \models \beta$

Demuestra que $(\Phi(\mathbb{B}_\rho)/_{\equiv,\leq})$ es una retícula distributiva, complementada con al menos dos elementos.