# Lógica Matemática I. Tarea-Examen IV.

**Prof. Rafael Rojas Barbachano.**
**Ayte. Jorge Alan Morales Morillón.**
**Ayte. Adrián Alberto de Flon Gasca.**

**23 - 05 - 2016**

## 1. Cálculo de Proposiciones

**1.1. (1.0 pto.)** Verifica si las siguientes fórmulas son teoremas de C.P. o no, si la respuesta es afirmativa exhiba la deducción, si es negativa puede argumentar desde el Metateorema de Correctud para el C.P.

- $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$
- $(\alpha \to \alpha) \to \alpha$
- $(\alpha \to (\beta \to \alpha)) \to (\beta \to \alpha)$
- $(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$
- $(\alpha \to \gamma) \to (\neg\alpha \to \beta)$
- $((\alpha \to \gamma) \vee (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma)$

**1.2. (1.0 pto.)** Demuestra que **C.P.** es una teoría concistente.

## 2. Metateorema de la Deducción

**2.1. (1.0 pto.)** Sean $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \Phi(\mathbb{B})$ como en el **MTS₂**. Así.

$$\models (\alpha \leftrightarrow \beta) \to (\alpha' \leftrightarrow \beta')$$

**2.2. (1.0 pto.)** Sean $\alpha, \gamma, \delta, \tilde{\alpha} \in \Phi(\mathbb{B})$ como en el **MTS₃**. Así.

$$\models (\gamma \leftrightarrow \delta) \to (\alpha \leftrightarrow \tilde{\alpha})$$

## 3. Compacidad

**3.1. (2.0 pts.)** Decimos que una gráfica es k-coloreable si hay una coloración de sus vértices con k colores tal que cualesquiera dos vértices adyacentes tienen colores distintos. Prueba usando el teorema de compacidad para la lógica de predicados, que una gráfica es k-coloreable sii toda subgráfica finita es k-coloreable.

## 4. Consecuencia Lógica

**4.1. (1.0 pto.)** Sean $\Sigma \cup \{\alpha, \beta, \gamma\} \in \Phi(\mathbb{B})$.
Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, de ser verdaderas exhiba una prueba y de ser falsa un contraejemplo.

- Si $\Sigma \not\models \alpha$, entonces $\Sigma \models \neg\alpha$
- Si $\Sigma \models \neg\alpha$, entonces $\Sigma \not\models \alpha$
- Si $\Sigma \models \alpha \& \beta$, entonces $\Sigma \models \alpha$ y $\Sigma \models \beta$
- Si $\Sigma \models \alpha$ y $\Sigma \models \beta$, entonces $\Sigma \models \alpha \& \beta$
- Si $\Sigma \models \alpha \vee \beta$, entonces $\Sigma \models \alpha$ o $\Sigma \models \beta$
- Si $\Sigma \models \alpha$ o $\Sigma \models \beta$, entonces $\Sigma \models \alpha \vee \beta$
- Si $\alpha \vee \beta \models \gamma$, entonces $\alpha \models \gamma$ y $\beta \models \gamma$
- Si $\alpha \vee \beta \models \gamma$, entonces $\alpha \models \gamma$ o $\beta \models \gamma$

**4.2. (1.5 pts.)** ¿Cuántas fórmulas no lógicamente equivalentes entre sí hay, que tengan exactamente $n(n \in \mathbb{Z}^+)$ letras proposicionales? ¿Por qué?

## 5. Formas Normales

**5.1. (1.0 pto.)** Sea $\alpha$ una fórmula normal (booleana).

- Sea $\alpha'$ la fórmula que resulta de $\alpha$ al intercambiar el conectivo **&** por el conectivo $\vee$ y vice versa.
  - Prueba que, $\models \alpha$ sii $\models \neg\alpha'$
  - Si $\beta$ y $\gamma$ son fórmulas normales, entonces:
    - $\models \beta \to \gamma$ sii $\models \beta' \to \gamma'$
    - $\models \beta \leftrightarrow \gamma$ sii $\models \beta' \leftrightarrow \gamma'$
- Sea $\alpha^*$ la fórmula que resulta de sustituir en $\alpha$ cada letra proposicional por su negación y de cambiar el **&** por el $\vee$ y vice versa.
  Prueba, usando el principio de inducción sobre formación de fórmulas, que:

$$\neg\alpha \equiv \alpha^*$$

  O equivalentemente,

$$\alpha \equiv \neg\alpha$$

## 6. Random

**6.1. (2.5. pts.)** Dadas dos fórmulas del Cálculo de Proposiciones definimos la siguiente función:

$$f : \mathcal{T}_\rho \times \mathcal{T}_\rho \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$f(\alpha, \beta) = n \quad \text{si } \alpha \neq \beta$$

$$f(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{si } \alpha \ = \beta$$

Donde $\boldsymbol{n}$ es el menor valor que puede tomar la longitud de la demostración de $\boldsymbol{\beta}$ a partir de $\boldsymbol{\alpha}$ y los axiomas de **C.P.**. Definimos la siguiente función:

$$d(\alpha, \beta) = max\{f(\alpha, \beta), f(\beta, \alpha)\}$$

Demuestra que la función $d$ es una métrica bien definida en $\boldsymbol{\mathcal{T}_{\rho}}$.