Lógica Matemática I. Tarea-Examen II.

Prof. Rafael Rojas Barbachano.
Ayte. Jorge Alan Morales Morillón.
Ayte. Adrián Alberto de Flon Gasca.

05 - 04 - 2016

1. Sistemas Formales

1.1. (1pto.) Sea $SF_L = \langle L, \{R_i\}_{i\in I}\rangle$ un Sistema Formal y sean $\Gamma, \Delta \subseteq \Phi$ y $A, B \in \Phi$, entonces:

a) Para toda $c \in \Gamma$, $\Gamma \vdash_{SF_L} c$

b) Si $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\Gamma \vdash_{SF_L} A$, entonces $\Delta \vdash_{SF_L} A$

c) Si $\Gamma \vdash_{SF_L} A$ y $A \vdash_{SF_L} B$, entonces $\Gamma \vdash_{SF_L} B$

d) Si para cada $B_i \in \Delta$, se tiene $\Gamma \vdash_{SF_L} B_i$ y $\Delta \vdash_{SF_L} A$, entonces $\Gamma \vdash_{SF_L} A$

e) (Metateorema de Finitud) $\Delta \vdash_{SF_L} A$ sii existe un subconjunto finito Γ de Δ tal que $\Gamma \vdash_{SF_L} A$

1.2. (1pto.) Considerando $SF_L = \langle L, \{R_i\}_{i\in I}\rangle$, sean $\Gamma, \Delta \subseteq \Phi$ y $A \in \Phi$, entonces:

a) $\overline{\overline{\Gamma}} = \overline{\Gamma}$

b) $\overline{\Phi} = \Phi$, por lo que Φ es una teoría formal.

c) Si $\Gamma \subseteq \Delta$, entonces $\overline{\Gamma} \subseteq \overline{\Delta}$

d) $\overline{\Gamma} \cup \overline{\Delta} \subseteq \overline{\Gamma \cup \Delta}$

e) $\overline{\Gamma \cap \Delta} \subseteq \overline{\Gamma} \cap \overline{\Delta}$

f) Γ es una teoría formal sii $\Gamma \vdash A \leftrightarrow A \in \Gamma$

1.3. (1.5pts.) Considere $SF_L = \langle L, \{R_i\}_{i\in I}\rangle$, un Sistema Formal y sea $\Gamma \subseteq \Phi$, demustre que:

a) $\overline{\Gamma} = \cap\langle T \mid T \text{ es Teoría y } \Gamma \subseteq T\rangle$

b) Si T es una Teoría y Γ es un conjunto de axiomas para T, entonces son equivalentes:

1) Γ es independiente para T
2) $\Delta \subsetneq \Gamma$ entonces $\overline{\Delta} \subsetneq T$

2. Lenguajes Formales e Interpretación

2.1. (1pto.) Considere la siguiente Estructura Elemental $\Phi = \langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, |\cdot|, f, \leq, P, 0, 1\rangle$ donde f es la función sucesor, P es una relacón de aridad 1.
Sea $\rho = \langle h_+, h_-, h_\cdot, h_{|\cdot|}, f_f\rangle \cup \langle R_\leq, R_P\rangle \cup \langle c_0, c_1\rangle$ un tipo de semejanza adecuado para la estructura.
Para las siguientes expresiones de L_ρ, determine si son fórmulas, si las variables ocurren libres o acotadas, y en caso de ser enunciados, si son verdaderos o no.

a) $h_+(v_0, c_0)$

b) $\exists v_0(\forall v_1(R_\leq(v_0, h_+(c_1, v_1))))$

c) $(R_P(v_1, c_0) \vee (c_1 \approx v_0)) \to (h_\cdot(v_3, v_4) \approx c_0)$

d) $\forall v_1((\neg(c_0 \approx v_1)) \to (\exists v_2(h_+(v_1, v_2) \approx c_0)))$

e) $(R_\leq(c_0, c_1))\&(h_\cdot(v_0, c_0))$

f) $\forall v_0(\forall v_1((R_\leq(v_0, v_1)) \to (\exists v_2((R_\leq(v_0, v_2))\&(R_\leq(v_2, v_1))))))$

g) $\forall v_0(h_+(v_0, v_1) \approx c_0)$

2.2. (1.5pts.) Sea ρ un tipo de semejanza. Demuestre que las siguientes fórmulas son universalmente verdaderas:

a) $(\forall x(\forall y(\alpha(x, y)))) \leftrightarrow (\forall y(\forall x(\alpha(x, y))))$

b) $(\forall x(\forall y(\forall z((x \approx y)\&(y \approx z)) \to (x \approx z)))))$

c) $(\forall x(\alpha(x))) \to (\exists x(\alpha(x)))$

d) $(\forall x((\alpha(x))\&(\beta(x))) \leftrightarrow ((\forall x(\alpha(x)))\&(\forall x(\beta(x))))$

e) $(\alpha(t)) \to (\exists x(\alpha(x)))$ si t es un término libre para x en α.

f) $(\exists x((\alpha(x))\&(\beta(x))) \to ((\exists x(\alpha(x)))\&(\exists x(\beta(x))))$

2.3. (1.5pts.) Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $\alpha, \beta \in FRM_\rho$. Así:

1. *a)* α es falsa en $\mathfrak{A}$ sii $\mathfrak{A} \models \neg\alpha$
   b) $\mathfrak{A} \models \alpha$ sii $\neg\alpha$ es falsa en $\mathfrak{A}$
2. No es el caso que ambas se den: $\mathfrak{A} \models \alpha$ y $\mathfrak{A} \models \neg\alpha$. Es decir, ninguna fórmula es verdadera y falsa en una ρ-interpretación
3. $\mathfrak{A} \models \alpha \to \beta$ y $\mathfrak{A} \models \alpha$, entonces $\mathfrak{A} \models \beta$
4. $\alpha \to \beta$ es falsa en $\mathfrak{A}$ sii $\mathfrak{A} \models \alpha$ y $\mathfrak{A} \models \neg\beta$
5. $\mathfrak{A} \models \alpha$ sii $\mathfrak{A} \models \forall x\alpha$
   Esto se puede generalizar de la siguiente manera: Por la *Clausura* de α, denotado por $\overline{\alpha}$, entenderemos por la fórmula, cerrada o enunciado, que se obtiene de α, al anteponerle a ella todos los cunantificadores universales de las variables -en orden creciente- que ocurren libres en ella. Así $\mathfrak{A} \models \alpha$ sii $\mathfrak{A} \models \overline{\alpha}$.

2.4. (1pto.) Construya un tipo de semejanza adecuado para escribir los siguientes conceptos:

a) La relación $\boldsymbol{R}$ es un orden lineal denso.

b) Que un orden $\boldsymbol{R}$ tiene un elemento mínimo.

c) Que una función $\boldsymbol{f}$ sea monotona.

d) Que $\boldsymbol{R}$ sea una relación de equivalencia.

e) Tener exactamente tres elementos.

f) Nadie en la clase de estadísticas es más inteligente que todos en la clase de lógica.

3. Random

3. (3pts.) Sea L un lenguaje formal $L = \langle S, \Phi \rangle$. Sea SF_L un sistema formal $SF_L = \langle L, \{R_i\}_{i \in I} \rangle$. Sea $\Gamma \subseteq \Phi$, tal que Γ es una teoría.

Definición 1: Sean $\alpha, \beta \in \Phi$. Decimos que $\boldsymbol{\alpha}$ está relacionado con $\boldsymbol{\beta}$ módulo $\boldsymbol{\Gamma}$, $\boldsymbol{(\alpha \sim_{\Gamma} \beta)}$ sii

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{SF_L} \beta$$

$$\Gamma \cup \{\beta\} \vdash_{SF_L} \alpha$$

- Demostrar que $\boldsymbol{\sim_{\Gamma}}$ es una relación de equivalencia.

Definición 2: Sea $[\alpha] = \{\delta \in \Phi : \delta \sim_{\Gamma} \alpha\}$, la clase de equivalencia de α definida por la relación de equivalencia anterior.

Definición 3: Sea $<_{\Gamma}$ una relación (binaria), tal que $[\alpha] <_{\Gamma} [\beta]$ sii

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{SF_L} \beta$$

$$\alpha \in [\alpha]$$

$$\beta \in [\beta]$$

- Demostrar que $<_{\Gamma}$ está bien definida y es un orden Parcial.

- Demostrar que el orden parcial tiene máximo. Diga quien es explícitamente.