ESTRUCTURAS ELEMENTALES

Como ya mencionamos, la Matemática será nuestro lenguaje objeto y al mismo tiempo nuestro metalenguaje (amén del Español). El objetivo de este capítulo será establecer con todo rigor la sintaxis y la semántica de un Lenguaje Formal adecuado para cierto tipo de estructuras matemáticas. Algunos ejemplos de estas estructuras son:

$$\langle \mathbb{N} , < \rangle , \langle \mathbb{Z} , \leq \rangle , \langle \mathbb{Q} , > \rangle , \langle \mathbb{R} , \geq \rangle , \langle \wp(A) , \subseteq \rangle ;$$

$$\langle \mathbb{N} , s , 0 \rangle , \langle \mathbb{Z} , \_ - 1 , 0 \rangle ;$$

$$\langle \mathbb{Z} , + , \cdot , 0 , 1 \rangle , \langle \mathbb{Q} , + , \cdot , 0 , 1 \rangle , \langle \mathbb{R} , < , + , \cdot , 0 , 1 \rangle$$

$$\langle \wp(A) , \cup , \cap , \_^{c} , \emptyset , A \rangle$$

Antes de dar una definición rigurosa de este tipo de estructuras, pongamos en claro algunos conceptos.

En lo que sigue, sea A un conjunto no–vacío y $n \in \mathbb{Z}^{+}$.

Definición. Diremos que r es una *Relación n–aria sobre* A syss

$$r \subseteq A^{n}$$

Definición. Diremos que o es una *Operación n–aria sobre* A syss

$$o : A^{n} \to A$$

Definición. $\mathfrak{A}$ es una *Estructura Elemental* syss $\mathfrak{A} = \langle A , \mathcal{R} , \mathcal{O} , \mathcal{E} \rangle$, donde:

•) A es un conjunto no– vacío, llamado *Universo* o *Base* de $\mathfrak{A}$.

• •) $\mathcal{R}$ es un conjunto, posíblemente vacío, de relaciones sobre A.

• • •) $\mathcal{O}$ es un conjunto, posíblemente vacío, de operaciones sobre A.

• • • •) $\mathcal{E}$ es un conjunto, posíblemente vacío, de elementos de A, llamados *Elementos Distinguidos* de $\mathfrak{A}$.

Los ejemplos anteriores los podemos *ver* como estructuras elementales:

1. $\langle \mathbb{N} , \{ < \} , \emptyset , \emptyset \rangle$, $\langle \mathbb{Z} , \{ \leq \} , \emptyset , \emptyset \rangle$, $\langle \mathbb{Q} , \{ > \} , \emptyset , \emptyset \rangle$, $\langle \mathbb{R} , \{ \geq \} , \emptyset , \emptyset \rangle$, $\langle \wp(A) , \{\subseteq\} , \emptyset , \emptyset \rangle$;

2. $\langle \mathbb{N} , \emptyset , \{ s \} , \{0\} \rangle$, $\langle \mathbb{Z} , \emptyset , \{ \_ - 1 \} , \{0\} \rangle$;

3. $\langle \mathbb{Z} , \emptyset , \{+ , \cdot\} , \{0 , 1\} \rangle$, $\langle \mathbb{Q} , \emptyset , \{+ , \cdot\} , \{0 , 1\} \rangle$;

4. $\left\langle \mathbb{R} , \left\{ < \right\} , \left\{ + , \cdot \right\} , \left\{ 0 , 1 \right\} \right\rangle$;

5. $\left\langle \wp(A) , \emptyset , \left\{ \cup , \cap , \_^{c} \right\} , \left\{ \emptyset , A \right\} \right\rangle$.

NO-ejemplos:

6. La Geometría Euclideana Plana, no se puede ver como una estructura elemental.

7. Los Espacios Vectoriales, de principio, no se pueden trabajar como una estructura elemental.

8. Espacios Topológicos.

Más ejemplos:

9. $\left\langle \mathbb{Z} , \{ | \} , \emptyset , \emptyset \right\rangle$ donde "|" es la divisibilidad entre Enteros.

10. $\left\langle \mathbb{R} \setminus \left\{ 0 \right\} , \emptyset , \left\{ \div \right\} , \left\{ \pi , e^{-1} \right\} \right\rangle$.

11. $\left\langle \mathbb{N} , \left\{ \emptyset \right\} , \left\{ \_ + 41 \right\} , \left\{ 28 , 35 \right\} \right\rangle$.

12. Las estructuras triviales :

a). $\left\langle A , \emptyset , \emptyset , \emptyset \right\rangle$ con A un conjunto cualquiera, pero no–vacío.

b). $\left\langle A , \mathcal{R}_A , \mathcal{O}_A , A \right\rangle$ donde $A \neq \emptyset$, $\mathcal{R}_A$ es el conjunto de todas las relaciones sobre A; $\mathcal{O}_A$ es el conjunto de todas las operaciones sobre A y tiene a todos los elementos de A como elementos distinguidos (*Estructura Saturada de* A).

Nota. Sea $\mathfrak{A} = \left\langle A , \mathcal{R} , \mathcal{O} , \mathcal{E} \right\rangle$ una estructuras elemental. En el caso en que,

1. $\mathcal{R} = \emptyset$, a la estructura $\mathfrak{A}$ se le llama *Estructura Algebraica.*

2. $\mathcal{O} = \emptyset = \mathcal{E}$, a la estructura $\mathfrak{A}$ se le llama *Estructura Multirrelacional.*