Ahora pasemos a dar la definición rigurosa de un lenguaje Formal, adecuado para "hablar" de las estructuras elementales.

En lo que sigue, fijemos un tipo de semejanza, digamos ρ.

$$\rho = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathcal{P}_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathcal{F}_n\right) \cup \mathcal{C}$$

Definición₁. Un *Lenguaje (Formal de 1er. Orden) de Tipo* ρ, en breve un ρ*–Lenguaje*, $\mathcal{L}_\rho$, es un conjunto de símbolos de la forma:

$\mathcal{L}_\rho = \rho$		(No–Lógicos)
$\cup$	$\{v_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$	(Variables)
$\cup$	$\{ \approx \}$	(Igualdad)
$\cup$	$\{\neg \ , \ \& \ , \ \vee \ , \ \rightarrow \ , \ \leftrightarrow \}$	(Conectivos)
$\cup$	$\{\forall , \exists\}$	(Cuantificadores)
$\cup$	$\{) , (, ' \}$	(Auxiliares o de Puntuación)

Con la única condición de que un símbolo ***no*** *es una sucesión finita de otros símbolos.*

Recordemos que tenemos la notación,

$$VAR = \{v_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$$

Definición₂. e es una *Expresión de Tipo* ρ o una ρ*–Expresión* syss e es una sucesión finita de símbolos de $\mathcal{L}_\rho$.

Notación: $EXP_\rho = \{e \ / \ e \text{ es una } \rho - \text{expresión}\}$

$$= \{e \ / \ e \text{ es una sucesión finita de símbolos de } \mathcal{L}_\rho\}$$

$$= \{e \ / \ \text{hay un } n \in \mathbb{N} \text{ tal, que } e : \{1, \ldots n\} \rightarrow \mathcal{L}_\rho\}$$

Definición₂. TRM_ρ es el $\subseteq$–menor conjunto de ρ–expresiones que:

I) Contiene a las variables y a las constantes:

$$VAR \cup \mathcal{C} \subseteq TRM_\rho \subseteq EXP_\rho$$

II) Es cerrado bajo la aplicación de letras funcionales:

Si $F \in \mathcal{F}_n$ y $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in TRM_\rho$, entonces

$$F(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \in TRM_\rho$$

Notación: A los elementos de TRM_ρ se les llaman*Términos de tipo* ρ o bien, ρ–*Términos*.

Definición₃. FRM_ρ es el $\subseteq$–menor conjunto de ρ–expresiones que:

I) Contiene a todas las ρ–atómicas:

Si $P \in \mathcal{P}_n$ y $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in TRM_\rho$, entonces

$$(\tau_1 \approx \tau_2) \in FRM_\rho \quad \text{y} \quad P(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \in FRM_\rho$$

II) Es cerrado bajo conectivas y cuantificadores:

a) Si $\alpha,\ \beta \in FRM_\rho$, entonces

$$(\neg\alpha)\ ,\ (\alpha\ \&\ \beta)\ ,\ (\alpha \vee \beta)\ ,\ (\alpha \to \beta)\ ,\ (\alpha \leftrightarrow \beta) \in FRM_\rho$$

b) $\alpha \in FRM_\rho$ y $x \in VAR$, entonces

$$\big(\forall x\ \alpha\big),\ \big(\exists x\ \alpha\big) \in FRM_\rho$$

Notación: A los elementos de FRM_ρ les llamaremos *Fórmulas (Bien Formadas) de tipo* ρ o ρ–*Fórmulas.*

Ejemplos: …

Variables Libres y Acotadas

La forma cotidiana –por supuesto, en matemáticas– de usar las variables, envuelve dos distintas maneras. Veamos tres ejemplos:

Ejemplos:

I. Las integrales, en el plano real $(\mathbb{R}^2)$:

1. $\int_1^x \frac{1}{t}dt$

a. $\int_1^y \frac{1}{t}dt$ **b**. $\int_1^x \frac{1}{s}ds$

Dicen lo mismo: **1**. y **b**.
Dicen cosas distintas: **1**. y **a**.

II. Las sumatorias, en los enteros $(\mathbb{Z})$:

2. $\sum_{i=i}^{n} a_i$

c. $\sum_{j=1}^{n} a_j$ **d**. $\sum_{i=1}^{m} a_i$

Dicen lo mismo: **2**. y **c**.
Dicen cosas distintas: **2**. y **d**.

III. Los polinomios con coeficientes en los reales $(\mathbb{R})$:

3. $ax^2 + bx + c$

e. $ay^2 + by + c$ **f**. $a'x^2 + b'x + c'$

Dicen lo mismo: **3**. y **e**.
Dicen cosas distintas: **3**. y **f**.

Hay pues, dos maneras distintas de usar las variables. Unas se llaman *Acotadas* y las otras *Libres.* Tratemos de entresacar algunas de sus propiedades:

Variable Acotada: Variable de “adeveras”, una verdadera variable; puede tomar todos los valores –del dominio de variabilidad– pero ninguno en particular.

Variable Libre: Variable de “ule”, “aparente”, puede ser cualquier elemento del dominio de variabilidad, pero uno solo, inamovible durante el discurso.

Variable Acotada: Si se cambia la variable, por otra, *no* cambia el significado de la expresión.

Variable Libre: Si se cambia la variable, por otra, cambia el significado de la expresión.

En los ejemplos anteriores las variables son,

- Acotadas: En **1**., t. En **2**., i. En **3**. x.
- Libres: En **1**., x. En **2**., n. En **3**., a, b y c.

Pasemos ahora a dar una definición formal de lo que significa que una ocurrencia de una variable, en una fórmula, sea acotada o libre.

De ahora en adelante, sea ρ un tipo de semejanza y $\mathcal{L}_\rho$ un lenguaje de tipo ρ.

Recordemos la noción de alcance de un cuantificador:

En la ρ–fórmula, $(\forall x\alpha)$ (o en $(\exists x\alpha)$) a "α" se le llama *el alcance* del cuantificador "$\forall x$" (o "$\exists x$"). Dicho de otra manera, el *alcance* del cuantificador "$\forall x$" (o "$\exists x$") es la fórmula inmediatamente a su derecha. Obsérvese que la variable x, puede no ocurrir en α.

Definición₁. Sea x una variable que ocurre en la fórmula β. *Una ocurrencia de x en β*, es *Acotada en β* syss dicha ocurrencia de x, es la variable de un cuantificador "$\forall x$" (o "$\exists x$") en β, o está en el alcance de algún cuantificador "$\forall x$" (o "$\exists x$"). En caso contrario, se dirá que dicha ocurrencia es *Libre.*

Ejemplos: Sea $\rho = \{P\} \cup \{f\} \cup \{c\}$, donde $P \in \mathcal{P}_2$, $f \in \mathcal{F}_1$ y $c \in \mathcal{C}$. Y Consideremos las siguientes ρ–fórmulas:

1. $P(v_0, v_1)$

2. $\big(\exists v_2 P(v_0, v_1)\big)$

3. $\big(\forall v_0 P(v_0, v_1)\big)$

4. $\Big(\big(\exists v_0 P(v_0, v_1)\big) \to \big(f(v_0) \approx c\big)\Big)$

5. $\Big(\forall v_0 \Big(P(v_0, v_1) \to \big(\forall v_1 P(f(v_0), v_1)\big)\Big)\Big)$

En **1**. y en **2**. las únicas ocurrencias de v_0 y de v_1 son líbres y la única ocurrencia de v_2, es acotada en **2**. En **3**., todas las ocurrencias de v_0 son acotadas y la única de v_1 es líbre. En **4**., las primeras dos ocurrencias de v_0 son acotadas y la última es libre; la única de v_1 es líbre. En **5**., todas las ocurrencias de v_0 (a saber 3) son acotadas, la primera de v_1 es libre y las otras dos, son acotadas.

Definición₂. Sea $\sigma \in FRM_\rho$. Diremos que σ es un *Enunciado de Tipo* ρ, en breve, ρ–*Enunciado* syss en σ todas las ocurrencias de sus variables son acotadas.

Notación: $\mathcal{L}_\rho^0 = \left\{\sigma \in FRM_\rho \ / \ \sigma \text{ es un } \rho\text{-enunciado}\right\}$.