Satisfacibilidad

Ya hemos visto que para interpretar un término en una estructura, interpretación de nuestro lenguaje, necesitamos dar una asignación de elementos, del universo de interpretación, a todas y cada una de las variables. También vimos cómo se interpreta una fórmula atómica, dada una estructura y una asignación a las variables, obteniendo así la noción de satisfacibilidad. Pasemos ahora a dar la misma noción pero para todas las fórmulas.

Ya que el conjunto de fórmulas, FRM_ρ, es un conjunto generado (líbremente), podemos definir una relación (o una función, si quisieramos) para éste conjunto en forma recursiva. Así procederemos para dar la definición de satisfacibilidad para todas las fórmulas.

Antes, necesitamos un poco de,

Notación y Convenciones:

1. Si A es un conjunto no–vacío,

$$\begin{aligned} {}^{\omega}A &= \{ s \ / \ s : VAR \to A \} \\ &= \{ s \ / \ s \text{ es una } A\text{–asignación} \} \ . \end{aligned}$$

2. Si $s \in {}^{\omega}A$ y $n \in \mathbb{N}$, algunas veces escribiremos s_n en lugar de $s(v_n)$. Así podríamos pensar que

$$s \rightleftharpoons \langle s_0, s_1, \dots, s_n, \dots \rangle$$

es una sucesión infinita de elementos de A.

3. Sean, $s \in {}^{\omega}A$, $a \in A$ e $i \in \mathbb{N}$. Por $s(v_n / a)$ entenderemos a la “nueva” A–asignación que se obtiene a partir de s al quitar el valor s_n y poner en su lugar el valor a y dejar todo lo demás igual. Con todo rigor,

$$s(v_n / a) : VAR \to A$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \ s(v_n / a)(v_m) = \begin{cases} a & \text{si } m = n \\ s_m & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

También lo podemos pensar así:

$$s(v_n / a) \rightleftharpoons \langle s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, a, s_{n+1}, \dots \rangle$$

4. La notación anterior se generaliza en forma natural para:

$$s(v_{n_1} / a_1, \dots, v_{n_m} / a_m)$$

donde $s \in {}^{\omega}A$, $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}^+$ y $a_1, \ldots, a_m \in A$.

5. Cuando usemos metavariables sobre VAR, digamos x, y, z, la A–asignación $s(x/a, y/b, z/c)$ es la obvia.

Definición Recursiva de *Satisfacibilidad (TARSKI, 1936)*, $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$:
La ρ–fórmula α se Satisface en la ρ–estructura $\mathfrak{A}$, bajo la A–asignación s, o, *La ρ–estructura $\mathfrak{A}$ Satisface la ρ–fórmula α en (o bajo) la A–asignación s* :

I) Si $P \in P_n$ y $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ son ρ–Términos, entonces

$$\mathfrak{A} \models (\tau_1 \approx \tau_2)[s] \quad \text{syss} \quad \tau_1^{\mathfrak{A}}[s] = \tau_2^{\mathfrak{A}}[s]$$

$$\mathfrak{A} \models P(\tau_1, \ldots, \tau_n)[s] \quad \text{syss} \quad \langle \tau_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[s] \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$$

II) **a**) Si α y β son ρ–fórmulas, entonces

$$\mathfrak{A} \models (\alpha \ \& \ \beta)[s] \quad \text{syss} \quad \mathfrak{A} \models \alpha[s] \quad \text{y} \quad \mathfrak{A} \models \beta[s]$$

$$\mathfrak{A} \models (\alpha \vee \beta)[s] \quad \text{syss} \quad \mathfrak{A} \models \alpha[s] \quad \text{o} \quad \mathfrak{A} \models \beta[s]$$

$$\mathfrak{A} \models (\neg \alpha)[s] \quad \text{syss} \quad \mathfrak{A} \not\models \alpha[s]$$

$$\mathfrak{A} \models (\alpha \rightarrow \beta)[s] \quad \text{syss} \quad \mathfrak{A} \not\models \alpha[s] \quad \text{o} \quad \mathfrak{A} \models \beta[s]$$

$$\mathfrak{A} \models (\alpha \leftrightarrow \beta)[s] \quad \text{syss} \quad \mathfrak{A} \models (\alpha \rightarrow \beta)[s] \text{ y } \mathfrak{A} \models (\beta \rightarrow \alpha)[s]$$

b) Si α es una *ρ–Fórmula y* $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mathfrak{A} \models (\forall v_n \alpha)[s] \quad \text{syss} \quad \text{para todo } a \in A, \mathfrak{A} \models \alpha\left[s\left(v_n / a\right)\right]$$

$$\mathfrak{A} \models (\exists v_n \alpha)[s] \quad \text{syss} \quad \text{para algún } a \in A, \mathfrak{A} \models \alpha\left[s\left(v_n / a\right)\right]$$

Ejemplos: …

Queda claro que una fórmula puede ser satifecha, en una estructura, bajo una asignación determinada, pero no serlo en otra asignación. También puede suceder que una fórmula sea satisfecha, en una estructura, en toda asignación que demos o en ninguna. Y hay fórmulas que, sin importar de qué estructura se trate, siempre es satisfecha por todas las asignaciones o por ninguna. Pasemos a darles un nombre oficial.

Definición. Una ρ–fórmula α es *Verdadera* en una ρ–estructura $\mathfrak{A}$, o también, que $\mathfrak{A}$ es modelo de α syss α se satisface en $\mathfrak{A}$ bajo cualquier A–asignación s. En símbolos,

$$\mathfrak{A} \models \alpha \quad \text{syss} \quad \text{para toda } A\text{–asignación } s, \mathfrak{A} \models \alpha[s]$$

Definición. Una ρ–fórmula α es *Falsa* en una ρ–estructura $\mathfrak{A}$ syss α no se satisface en $\mathfrak{A}$, bajo ninguna A–asignación s. En símbolos,

α es *Falsa en* $\mathfrak{A}$ syss para toda A–asignación s, $\mathfrak{A} \nvDash \alpha[s]$

Definición. Una ρ–fórmula α es *Universalmente Verdadera* syss α es Verdadera en toda ρ–estructura $\mathfrak{A}$. En símbolos,

$$\vDash \alpha \quad \text{syss} \quad \text{para toda } \rho\text{–estructura } \mathfrak{A},\ \mathfrak{A} \vDash \alpha$$

Definición. Una ρ–fórmula α es *Universalmente Falsa* syss α es Falsa en toda ρ–estructura $\mathfrak{A}$.

Notación:

- $\mathcal{UV}_\rho = \{\alpha \ / \ \alpha$ es una ρ–fórmula universalmente verdadera$\}$
- $\mathcal{UF}_\rho = \{\alpha \ / \ \alpha$ es una ρ–fórmula universalmente falsa$\}$

Definición. Una ρ–interpretación $\mathfrak{A}$ es *Modelo* de un conjunto Γ de ρ–fórmulas syss $\mathfrak{A}$ hace verdaderas a todas las fórmulas de Γ.

Ejemplos: …

Proposición. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $\alpha,\ \beta \in FRM_\rho$. Así,

I. **a**). α es falsa en $\mathfrak{A}$ syss $\mathfrak{A} \vDash (\neg\alpha)$

b). $\mathfrak{A} \vDash \alpha$ syss $(\neg\alpha)$ es falsa en $\mathfrak{A}$

II). No es el caso que ambas se den, $\mathfrak{A} \vDash \alpha$ y $\mathfrak{A} \vDash (\neg\alpha)$. Es decir, ninguna fórmula es verdadera y falsa en una ρ–interpretación.

III). Si $\mathfrak{A} \vDash (\alpha \to \beta)$ y $\mathfrak{A} \vDash \alpha$, entonces $\mathfrak{A} \vDash \beta$.

IV). $(\alpha \to \beta)$ es falsa en $\mathfrak{A}$ syss $\mathfrak{A} \vDash \alpha$ y $\mathfrak{A} \vDash (\neg\beta)$.

V). $\mathfrak{A} \vDash \alpha$ syss $\mathfrak{A} \vDash (\forall x\alpha)$

Esto se puede generalizar de la siguiente manera. Por la *Clausura* de α, denotado por $\overline{\alpha}$, entenderemos por la fórmula, cerrada o enunciado, que se obtiene de α, al anteponerle a ella todos los cuantificadores universales de las variables –en orden creciente– que ocurren libres en ella. Así,

$$\mathfrak{A} \vDash \alpha \text{ syss } \mathfrak{A} \vDash \overline{\alpha}$$

Prueba: *TAREA.* †