LÓGICA de los CONECTIVOS

(LÓGICA PROPOSICIONAL)

Sea $\rho = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathcal{P}_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathcal{F}_n\right) \cup \mathcal{C}$ un tipo de semejanza.

Tenemos un resultado, que es intuitivamente cierto, sin embargo hay que establecerlo y habría que probarlo, aquí solamente lo enunciamos.

Proposición$_0$. (Metateorema de Lectura Única para FRM_ρ).

Una ρ–expresión e, $e \in EXP_\rho$, es una ρ–fórmula, $e \in FRM_\rho$ syss una y solo una de las siguientes condiciones se dá:

1. Hay únicos $\tau_1, \tau_2 \in TRM_\rho$ tales que $(\tau_1 \approx \tau_2) = e$, o

2. Hay únicos $P \in \mathcal{P}_n$ y $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in TRM_\rho$, tales que $e = P(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, o

3. Hay únicos $\alpha \in FRM_\rho$, tal que $e = (\neg\alpha)$, o

4. Hay únicos $\alpha, \beta \in FRM_\rho$, tales que $e = (\alpha \ \& \ \beta)$, o

5. Hay únicos $\alpha, \beta \in FRM_\rho$, tales que $e = (\alpha \vee \beta)$, o

6. Hay únicos $\alpha, \beta \in FRM_\rho$, tales que $e = (\alpha \to \beta)$, o

7. Hay únicos $\alpha, \beta \in FRM_\rho$, tales que $e = (\alpha \leftrightarrow \beta)$, o

8. Hay únicos $\alpha \in FRM_\rho$ *y* $n \in \mathbb{N}$, tales que $e = (\forall v_n \alpha)$, o

9. Hay únicos $\alpha \in FRM_\rho$ *y* $n \in \mathbb{N}$, tales que $e = (\exists v_n \alpha)$.

Definición$_1$. Una ρ–expresión e es un *Bloque* syss es una ρ–fórmula atómica o es una ρ–fórmula universal o existencial; es decir, si e tiene alguna de siguientes formas:
a) $e \risingdotseq (\tau_1 \approx \tau_2)$, donde τ_1, τ_2 son ρ–términos, o
b) $e \risingdotseq P(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, donde $P \in \mathcal{P}_n$ y $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son ρ–términos, o
c) $e \risingdotseq (\forall v_n \beta)$, donde $n \in \mathbb{N}$ y β es una ρ–fórmula, o
d) $e \risingdotseq (\exists v_n \beta)$, donde $n \in \mathbb{N}$ y β es una ρ–fórmula.

Ejemplos: …

Notación:

1) $\mathbb{B}_\rho = \left\{ e \in EXP_\rho \;/\; e \text{ es un bloque} \right\}$

2) Usaremos las letras mayúsculas $A, B, C,$ ... como metavariables para bloques. Algunas veces las (**mal**) llamaremos *Letras Proposicionales.*

Definición$_2$ Recursiva del conjunto de B_ρ–*Fórmulas,* $\Phi(\mathbb{B}_\rho)$.
$\Phi(\mathbb{B}_\rho)$ es el $\subseteq$–menor conjunto de ρ–expresiones que contiene a los bloques y es cerrado bajo conectivos; es decir, cumple con:

•) **I**. $\mathbb{B}_\rho \subseteq \Phi(\mathbb{B}_\rho) \subseteq EXP_\rho$

II. Si $e_1,\, e_2, \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, entonces

$$(\neg e_1),\ (e_1\ \&\ e_2),\ (e_1 \vee e_2),\ (e_1 \rightarrow e_2),\ (e_1 \leftrightarrow e_2) \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$$

• •) Si $E \subseteq EXP_\rho$ y cumple con **I** y **II**, entonces $\Phi(\mathbb{B}_\rho) \subseteq E$.

También aquí hay un principio de lectura único.

Proposición$_{00}$. (**Metateorema de Lectura Única para** $\Phi(\mathbb{B}_\rho)$).
Sea $e \in EXP_\rho$. Así, $e \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ syss

i) $e \fallingdotseq A$ para un único $A \in \mathbb{B}_\rho$, o
ii) $e \fallingdotseq (\neg\beta)$ para un único $\beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, o
iii) $e \fallingdotseq (\beta\ \&\ \gamma)$ para únicos $\beta,\ \gamma \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, o
iv) $e \fallingdotseq (\beta \vee \gamma)$ para únicos $\beta,\ \gamma \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, o
v) $e \fallingdotseq (\beta \rightarrow \gamma)$ para únicos $\beta,\ \gamma \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, o
vi) $e \fallingdotseq (\beta \leftrightarrow \gamma)$ para únicos $\beta,\ \gamma \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$

y solamente uno de los casos se dá.

La prueba de la siguiente afirmación es inmediata de los principios de lectura.

Proposición$_1$. $\Phi(\mathbb{B}_\rho) = FRM_\rho$.

Debido a la forma en que definimos a $\Phi(\mathbb{B}_\rho)$, se tiene el

Principio de Inducción sobre la Formación de $\mathbb{B}_\rho$–Fórmulas

Sea $\wp$ una propiedad que compete a las ρ–expresiones.

Si **I**) $\wp(A)$ para toda $A \in \mathbb{B}_\rho$. **Y**

II) Si $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ son tales que $\wp(\alpha)$ y $\wp(\beta)$ entonces

$\wp(\neg\alpha)$, $\wp(\alpha \ \& \ \beta)$, $\wp(\alpha \vee \beta)$, $\wp(\alpha \to \beta)$, $\wp(\alpha \leftrightarrow \beta)$

entonces para toda $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, se tiene que $\wp(\alpha)$.

Vamos ahora a dar las nociones básicas para tener lo que se llaman *Tablas de Verdad.*

Definición$_3$. Diremos que v es una *Asignación de Valores de Verdad a* $\mathbb{B}_\rho$, o, en breve, una $\mathbb{B}_\rho$–*Asignación* syss

$$v : \mathbb{B}_\rho \to \{0,\ 1\}$$

Notación. ${}^{\mathbb{B}_\rho}2 = \{v \ / \ v \text{ es una } \mathbb{B}_\rho\text{–asignación}\}$.

Proposición$_2$. Para cada $v \in {}^{\mathbb{B}_\rho}2$, hay una única v^* tal que:

$$v^* : \Phi(\mathbb{B}_\rho) \to \{0,\ 1\}$$

I) $v^*(A) = v(A)$, para toda $A \in \mathbb{B}_\rho$

II) Si $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, entonces

a) $v^*(\neg\alpha) = 1 - v^*(\alpha)$

b) $v^*(\alpha \ \& \ \beta) = min\ \{v^*(\alpha),\ v^*(\beta)\}$

c) $v^*(\alpha \vee \beta) = max\ \{v^*(\alpha),\ v^*(\beta)\}$

d) $v^*(\alpha \to \beta) = max\ \{1 - v^*(\alpha),\ v^*(\beta)\}$

e) $v^*(\alpha \leftrightarrow \beta) = min\ \{v^*(\alpha \to \beta),\ v^*(\beta \to \alpha)\}$

Prueba: *PENDIENTE.* †

Observación: Debido a que v es *función* y *solo* toma el valor de 0 o de 1, tenemos:

$$v^*(\alpha) = 0 \quad \text{syss} \quad v^*(\alpha) \neq 1$$

o, equivalentemente,

$$v^*(\alpha) = 1 \quad \text{syss} \quad v^*(\alpha) \neq 0$$

Si $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ y $v \in {}^{\mathbb{B}_\rho}2$, entonces $v^*(\alpha) \in \{0,\ 1\}$ y se llamará *el valor de verdad que toma* α *bajo* v.

Proposición₃. Si $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ y $v \in {}^{\mathbb{B}_\rho}2$, entonces

a) $v^*(\neg\alpha) = 1$ syss $v^*(\alpha) = 0$

b) $v^*(\alpha \ \&\ \beta) = 1$ syss $v^*(\alpha) = 1 = v^*(\beta)$

c) $v^*(\alpha \vee \beta) = 0$ syss $v^*(\alpha) = 0 = v^*(\beta)$

d) $v^*(\alpha \to \beta) = 0$ syss $v^*(\alpha) = 1$ y $v^*(\beta) = 0$

e) $v^*(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$ syss $v^*(\alpha) = v^*(\beta)$

Prueba: *Ejercicio.* †

Definición₄. Sea $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$,

a) α es una *Tautología* syss para toda $v \in {}^{\mathbb{B}_\rho}2,\ v^*(\alpha) = 1$

b) α es una *Contradicción* syss para toda $v \in {}^{\mathbb{B}_\rho}2,\ v^*(\alpha) = 0$

c) α es *Contingente* syss α no es ni tautología, ni contradicción

Nota. A las contingentes también se les conoce con los nombres de *Eventuales* o *Circunstanciales.*

Notación:

$$\mathcal{T}_\rho = \left\{\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho) \ / \ \alpha \text{ es una tautología}\right\}$$

$$\mathcal{C}_\rho = \left\{\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho) \ / \ \alpha \text{ es una contradicción}\right\}$$

Así, $\Phi(\mathbb{B}_\rho) \setminus (\mathcal{T}_\rho \cup \mathcal{C}_\rho)$ es el conjunto de las contingentes.

Proposición₄. Sea $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$. Así,

a) $\alpha \in \mathcal{T}_\rho$ syss $(\neg\alpha) \in \mathcal{C}_\rho$

b) $\alpha \in \mathcal{C}_\rho$ syss $(\neg\alpha) \in \mathcal{T}_\rho$

Prueba: *Ejercicio.* †

Ejemplos:

1. $\mathbb{B}_\rho \subseteq \left[\Phi(\mathbb{B}_\rho) \setminus (\mathcal{T}_\rho \cup \mathcal{C}_\rho)\right]$ (Los bloques son contingentes)
2. $(v_0 \approx v_0) \in \left[\mathbb{B}_\rho \cap \mathcal{UV}_\rho\right]$
3. $(\exists v_0(\neg(v_0 \approx v_0))) \in \left[\mathbb{B}_\rho \cap \mathcal{UF}_\rho\right]$
4. $(v_0 \approx v_1) \in \left[\mathbb{B}_\rho \setminus \left(\mathcal{UV}_\rho \cup \mathcal{UF}_\rho\right)\right]$
5. $(\neg(v_0 \approx v_0)) \rightarrow (\neg(v_0 \approx v_0)) \in \left[\left(\Phi(\mathbb{B}_\rho) \setminus \mathbb{B}_\rho\right) \cap \mathcal{T}_\rho\right]$
6. $((v_0 \approx v_1) \rightarrow (v_1 \approx v_0)) \in \left[\left(\Phi(\mathbb{B}_\rho) \setminus \mathbb{B}_\rho\right) \cap \left(\mathcal{UV}_\rho \setminus \mathcal{T}_\rho\right)\right]$
7. $((v_0 \approx v_1) \;\&\; (v_1 \approx v_2)) \in \left[\left(\Phi(\mathbb{B}_\rho) \setminus \mathbb{B}_\rho\right) \setminus \left(\mathcal{UV}_\rho \cup \mathcal{UF}_\rho\right)\right]$
8. $((v_0 \approx v_1) \leftrightarrow (\neg(v_1 \approx v_0))) \in \left[\left(\Phi(\mathbb{B}_\rho) \setminus \mathbb{B}_\rho\right) \cap \left(\mathcal{UF}_\rho \setminus \mathcal{C}_\rho\right)\right]$
9. $((v_0 \approx v_1) \;\&\; (\neg(v_0 \approx v_1))) \in \left[\left(\Phi(\mathbb{B}_\rho) \setminus \mathbb{B}_\rho\right) \cap \mathcal{C}_\rho\right]$

Veamos que toda tautología es una universalmente verdadera. Necesitamos el siguiente,

Lema$_5$. Para cada ρ–estructura $\mathfrak{A}$ y cada A–asignación s hay una $\mathbb{B}_\rho$–asignación $v_{\mathfrak{A},s}$ tal, que para toda $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ se tiene,

$v^*_{\mathfrak{A},s}(\alpha) = 1$ syss $\mathfrak{A} \models \alpha[s]$ .... *(α)

Prueba. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $s \in {}^\omega A$. Definimos $v_{\mathfrak{A},s} : \mathbb{B}_\rho \to \{0,1\}$ como sigue:

$$\text{Si } A \in \mathbb{B}_\rho, \qquad v_{\mathfrak{A},s}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \mathfrak{A} \models A[s] \\ & \text{o} \\ 0 & \text{si} \quad \mathfrak{A} \not\models A[s] \end{cases}$$

Veamos que la correspondiente $v^*_{\mathfrak{A},s}$ cumple con lo exigido y esto lo haremos por inducción sobre la formación de fórmulas:

I) Sea $A \in \mathbb{B}_\rho$. Probemos que *(A).

$\Leftarrow]$ Supongamos que $\mathfrak{A} \models A[s]$. De las definiciónes de $v^*_{\mathfrak{A}s}$ y $v_{\mathfrak{A}s}$, tenemos que

$$v^*_{\mathfrak{A},s}(A) = v_{\mathfrak{A},s}(A) = 1$$

$\Rightarrow]$ Si $\mathfrak{A} \nvDash A[s]$, tenemos que $v^*_{\mathfrak{A},s}(A) = v_{\mathfrak{A},s}(A) = 0$ y por la **Observación**, $v_{\mathfrak{A},s}(A) \neq 1$.

II) Sean $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$ y supongamos inductivamente que *(α) y *(β).

a) $v^*_{\mathfrak{A},s}(\neg\alpha) = 1$ syss $v^*_{\mathfrak{A},s}(\alpha) = 0$ **3.a**)
syss $v^*_{\mathfrak{A},s}(\alpha) \neq 1$ **Observación**
syss $\mathfrak{A} \nvDash \alpha[s]$ *(α) (**HI**)
syss $\mathfrak{A} \models \neg\alpha[s]$ Tarski

b) $v^*_{\mathfrak{A},s}(\alpha \to \beta) = 1$ syss $v^*_{\mathfrak{A},s}(\alpha) = 0$ o $v^*_{\mathfrak{A},s}(\beta) = 1$ **3.d**)
syss $v^*_{\mathfrak{A},s}(\alpha) \neq 1$ o $v^*_{\mathfrak{A},s}(\beta) = 1$ **Observación**
syss $\mathfrak{A} \nvDash \alpha[s]$ o $\mathfrak{A} \models \beta[s]$ *(α) y *(β) (**HI**)
syss $\mathfrak{A} \models (\alpha \to \beta)[s]$ Tarski

Dejamos al lector los otros tres casos. Con lo que concluimos que para toda $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, se tiene *$(\alpha)$. †

Proposición$_6$.

a) $\mathcal{T}_\rho \subsetneq \mathcal{UV}_\rho$

b) $\mathcal{C}_\rho \subsetneq \mathcal{UF}_\rho$

Prueba. La no igualdad entre estos conjuntos quedó establecida con los ejemplos dados anteriormente.

a) Procederemos por contrapositiva. Supongamos pues que, $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho) \setminus \mathcal{UV}_\rho$. Así, hay una $\mathfrak{A}_0 \in V_\rho$ y una $s_0 \in {}^\omega A$ tal, que $\mathfrak{A}_0 \nvDash \alpha[s_0]$. Por el lema anterior hay una $\mathbb{B}_\rho$–asignación $v_{\mathfrak{A}_0,s_0}$ tal, que

$$v^*_{\mathfrak{A}_0,s_0}(\alpha) = 1 \text{ syss } \mathfrak{A}_0 \vDash \alpha[s]$$

Como es el caso que $\mathfrak{A}_0 \nvDash \alpha[s_0]$, tenemos que $v^*_{\mathfrak{A}_0}(\alpha) \neq 1$ y por tanto $\alpha \notin \mathcal{T}_\rho$.

b) Si $\alpha \in \mathcal{C}_\rho$, entonces $(\neg\alpha) \in \mathcal{T}_\rho$ y por el **a**) tenemos, $(\neg\alpha) \in \mathcal{UV}_\rho$ y de aquí que $\alpha \in \mathcal{UF}_\rho$. †

Es claro que no toda universalmente válida es una tautología pero, ¿bajo qué condiciones se podría garantizar que sí lo fuera? La respuesta la encontramos bajo la suposición de que en la fórmula **no** aparezca el símbolo de igualdad ni tampoco un cuantificador.

Lema$_7$. Para cada $\mathbb{B}_\rho$–asignación v, hay una ρ–estructura $\mathfrak{A}_v$ y una A_v–asignación s_v tales que, para toda $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, en la cual no aparecen los símbolos de igualdad $(\approx)$ ni los cuntificadores $\left(\forall, \exists\right)$, se tiene

$$\mathfrak{A}_v \vDash \alpha[s_v] \quad \text{syss} \quad v^*(\alpha) = 1$$

Prueba: Sea v una $\mathbb{B}_\rho$–asignación.

Definimos una ρ–estructura $\mathfrak{A}_v$ como sigue,

a). $|\mathfrak{A}_v| = TRM_\rho \rightleftharpoons A_v$.

b). Si $P \in \mathcal{P}_n$, sea $P^{\mathfrak{A}_v} = \left\{\langle a_1,\ldots,a_n\rangle \in A_v^n \ / \ v(P(a_1,\ldots,a_n)) = 1\right\}$.

c). Si $f \in \mathcal{F}_n$, entonces $f^{\mathfrak{A}_v} : A_v^n \to A_v$ está dada como sigue

$$\text{Si } a_1,\ldots,a_n \in A_v,\ f^{\mathfrak{A}_v}(a_1,\ldots,a_n) = f(a_1,\ldots,a_n)$$

d). Si $c \in \mathcal{C}$, sea $c^{\mathfrak{A}_v} = c$.

También definimos s_v, una A_v–asignación, como $s_v = \langle v_0, v_1, v_2, \ldots\rangle$; es decir,

$$s_v : VAR \to A_v$$
$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad s_v(v_i) = v_i$$

Af. Para cualquier ρ–término τ, se tiene:

$$\tau^{\mathfrak{A}_v}[s_v] = \tau$$

Esto lo podemos ver por inducción sobre la formación de términos.

i). $v_i^{\mathfrak{A}_v}[s_v] = s_v(i) = v_i$ y $c^{\mathfrak{A}_v}[s_v] = c$.

ii). Si $f \in \mathcal{F}_n$ y $\tau_1,\ldots,\tau_n$ son ρ–términos, tenemos:

$$\begin{array}{rcll} f(\tau_1,\dots,\tau_n)^{\mathfrak{A}_v}[s_v] & = & f^{\mathfrak{A}_v}(\tau_1^{\mathfrak{A}_v}[s_v],\dots,\tau_n^{\mathfrak{A}_v}[s_v]) & \text{def. de interpretación} \\ & = & f^{\mathfrak{A}_v}(\tau_1,\dots,\tau_n) & \textbf{HI} \\ & = & f(\tau_1,\dots,\tau_n) & \text{def. de } f. \end{array}$$

Pasemos ahora a la prueba del **Lema**. Lo que tenemos que probar es que:
Para toda $\alpha \in \Phi(\mathbb{B}_\rho)$, en la cual no aparecen los símbolos $\approx, \forall, \exists$, se tiene que

$\mathfrak{A}_v \models \alpha[s_v]$ syss $v^*(\alpha) = 1$ ....$**(\alpha)$

Y esto lo haremos por inducción sobre la formación de fórmulas.

I] Sea α una fórmula atómica, en la cual no aparece el símbolo $\approx$. Así $\alpha \rightleftharpoons P(\tau_1,\dots,\tau_n)$, donde $P \in \mathcal{P}_n$ y $\tau_1,\dots,\tau_n$ son ρ–términos.

$$\begin{array}{rlll} \mathfrak{A}_v \models P(\tau_1,\dots,\tau_n)[s_v] & \text{syss} & \langle \tau_1^{\mathfrak{A}_v}[s_v],\dots,\tau_n^{\mathfrak{A}_v}[s_v]\rangle \in P^{\mathfrak{A}_v} & \text{Tarski} \\ & \text{syss} & \langle \tau_1,\dots,\tau_n\rangle \in P^{\mathfrak{A}_v} & \textbf{Af}. \\ & \text{syss} & v(P(\tau_1,\dots,\tau_n)) = 1 & \text{def. de } P^{\mathfrak{A}_v} \\ & \text{syss} & v^*(P(\tau_1,\dots,\tau_n)) = 1 & P(\tau_1,\dots,\tau_n) \in \mathbb{B}_\rho \text{ y} \\ & & & v^* \restriction \mathbb{B}_\rho = v \end{array}$$

II] Sean β y γ fórmulas en las cuales no aparecen los símbolos $\approx, \forall, \exists$ y que cumplen inductivamente con $**(\beta)$ y $**(\gamma)$. Así,

$$\begin{array}{rlll} \mathfrak{A}_v \models \neg\beta[s_v] & \text{syss} & \mathfrak{A}_v \not\models \beta[s_v] & \text{Tarski} \\ & \text{syss} & v^*(\beta) \neq 1 & **(\beta) \\ & \text{syss} & v^*(\neg\beta) = 1 & \text{prop. de } v^* \end{array}$$

$$\begin{array}{rlll} \mathfrak{A}_v \models (\beta \mathbin{\&} \gamma)[s_v] & \text{syss} & \mathfrak{A}_v \models \beta[s_v] \text{ y } \mathfrak{A}_v \models \gamma[s_v] & \text{Tarski} \\ & \text{syss} & v^*(\beta) = 1 \text{ y } v^*(\gamma) = 1 & **(\beta) \text{ y } **(\gamma) \\ & \text{syss} & v^*(\beta \mathbin{\&} \gamma) = 1 & \text{prop. de } v^* \end{array}$$

en forma similar se prueba para los conectivos $\vee, \rightarrow$ y $\leftrightarrow$. †

Proposición$_8$. Sea α una fórmula en la cual no aparecen los símbolos $\approx$, $\forall$, $\exists$. Así,

Si α es una Universalmente Verdadera, entonces α es una Tautología.

Prueba: Lo haremos por contrapositiva. Supongamos pues que α no es una tautología. Por lo que hay una $\mathbb{B}_\rho$–asignación, digamos v_0, tal que $v_0(\alpha) \neq 1$. Por el Lema anterior hay una estructura $\mathfrak{A}_{v_0}$ y una A_{v_0}–asignación s_{v_0} tales que

$$\mathfrak{A}_{v_0} \not\models \alpha[s_{v_0}]$$

y por tanto α no es una fórmula universalmente verdadera. †