Funciones Veritativas y Tablas de Verdad

Empezamos esta parte con una,

Definición$_1$. Sea $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$. Por $\mathbb{B}(\alpha)$ denotaremos el conjunto de letras proposicionales que aparecen en α. En simbolos,

$$\mathbb{B}(\alpha) = \left\{ A \in \mathbb{B}_\rho \ / \ A \text{ aparece en } \alpha \right\}$$

El valor de verdad de una fórmula solo depende de los valores tomados por las letras proposicionales que aparecen en ella.

Proposición$_1$. Sean $v_1, v_2 \in {}^{\mathbb{B}}2$. Para toda $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$, se tiene que:

$$\text{Si } \dot{\forall} A \in \mathbb{B}(\alpha) \left[v_1(A) = v_2(A) \right], \text{ entonces } \left[v_1^*(\alpha) = v_2^*(\alpha) \right]$$

Prueba: Se hace por inducción sobre la formación de fórmulas y sale directo usando las definiciones y propiedades de las $\mathbb{B}$–asignaciones. †

Tenemos pues, que el valor de verdad que toma una fórmula depende de los valores tomados por sus letras proposicionales y estas son un número finito. Ahora bien, si pensamos en todos los posibles valores que pueden tomar estas letras, tendríamos todos los posibles valores que puede tomar dicha fórmula y, por supuesto, estos tendrían que ser un número finito. Lo cual nos define una tabla. Pasemos a exponer esto con todo rigor.

Notación:

•) $V \rightleftharpoons \left\{0,\ 1\right\}$ (V es el conjunto de valores de verdad).

••) si $n \in \mathbb{Z}^+$, ${}^nV \rightleftharpoons \left\{ s \ / \ s \text{ es una sucesión de elementos de } V \text{ de longitud } n \right\}$.

•••) Si $s \in {}^nV$, escribiremos $\left\langle s_1,\ \ldots\ ,\ s_n \right\rangle \rightleftharpoons s$.

Definición$_2$. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Diremos que f es una *Función Veritativa de Aridad* n syss $f :\ {}^nV \to V$.

Si escribimos explícitamente una función veritativa, f, de aridad n la podemos acomodar en forma de una tabla.

	${}^{n}V$			f
	0	$\ldots$	0	$f(0,\ldots,0)$
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
s	s_1	$\ldots$	s_n	$f(s)$
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	1	$\ldots$	1	$f(1,\ldots,1)$

¿Cuántos renglones tiene la tabla? y ¿Cuántas funciones veritativas de aridad n hay?

Pasemos ahora a dar una definición rigurosa de lo que es una tabla de verdad para una fórmula.

Definición. Sea $n \in \mathbb{Z}^{+}$. Para cada sucesión de n letras proposicionales p, $p = \langle A_1,\ldots,A_n\rangle$, y para cada $s \in V^n$, $s = \langle s_1,\ldots,s_n\rangle$, fijamos $v_{p,\,s} : B \longrightarrow V$ como sigue,

Para cada $B \in \mathbb{B}$, sea $v_{p,\,s}(B) = \begin{cases} s_i & \text{si } B = A_i \text{ para alguna } i \in \{1,\ldots,n\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Definición. Sea $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$ y sea $p = \langle A_1,\ldots,A_n\rangle$ una ordenación de todas las letras proposicionales que aparecen en α, es decir de $\mathbb{B}(\alpha)$. La *función veritativa asociada a α según* p, la denotaremos por T_{α_p} y queda definida como sigue,

$$T_{\alpha_p} : {}^{n}V \to V$$
$$\dot{\forall}\ s \in {}^{n}V,\ T_{\alpha_p}(s) = v^{*}_{p,\,s}(\alpha)$$

Es claro que, T_{α_p} depende *del orden asignado* a las letras proposicionales que aparecen en α —dependen de p.

Veamos esto de cerca con un ejemplo: consideremos la fórmula $\alpha \leftrightharpoons (\neg A \vee B)$, aquí $\mathbb{B}(\alpha) = \left\{A,\ B\right\}$, si consideramos $p = \left\langle A,\ B\right\rangle$ y también a $q = \left\langle B,\ A\right\rangle$, tenemos que $T_{\alpha_p} \neq T_{\alpha_q}$. En particular, para $s = \langle 1,0\rangle$, se tiene que

$$T_{\alpha_p}(1,0) = v^{*}_{p,\,s}(\alpha) = Max\left\{\ 1-1\ ,\ 0\ \right\} = 0 \neq 1 = Max\left\{\ 1-0\ ,\ 1\ \right\} = v^{*}_{q,\,s}(\alpha) = T_{\alpha_q}(1,0)$$

En este ejemplo, notamos que si permutamos "con cuidado" las asignaciones, obtenemos el resultado esperado. si $t = \langle 0,1\rangle$, entonces

$$T_{\alpha_p}(s) = v^{*}_{p,\,s}(\alpha) = v^{*}_{q,\,t}(\alpha) = T_{\alpha_q}$$

Esto lo podemos parafrasear diciendo, que a cada permutación de las letras proposicionales le corresponde una permutación de los "renglones". Por tanto, no nos importa que orden impongamos a las letra proposicionales que aparecen en la fórmula.

Definición$_3$. *Una Tabla de Verdad de* α es T_{α_p} para alguna ordenación p de $\mathbb{B}(\alpha)$. Y la denotaremos por:

$$T_a$$

Resumiendo, a cada fórmula le corresponde una (en realidad varias, dependiendo del arreglo de las letras proposicionales) función veritativa, a saber su tabla de verdad. Una pregunta que inmediatamente surge es ¿toda función veritativa será la tabla de verdad de alguna fórmula? Para poder responderla, necesitamos introducir algunas nuevas nociones, por lo que quedará pendiente.

Para finalizar esta sección, tenemos la siguiente,

Proposición. Para cualquier $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$ se tiene

1) $\alpha \in \mathcal{T}_{\mathbb{B}}$ syss T_α es la constante 1
2) $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{B}}$ syss T_α es la constante 0
3) α es contingente syss T_α no es una constante

Puesto que las tablas son finitas, este resultado establece un *método efectivo* para saber si una fórmula dada es una tautología (contradicción) o no lo es. Al recordar que $\mathcal{T}_{\mathbb{B}} \subsetneq \mathcal{UV}_\rho$ (y que $\mathcal{C}_{\mathbb{B}} \subsetneq \mathcal{UF}_\rho$) tenemos por tanto, un *método parcial* para saber si una fórmula dada es Universalmente Válida (Universalmente Falsa) o no.