

FORMAS NORMALES

Teniendo a la mano la noción de Equivalencia Lógica y los Metateoremas de sustitución podemos contestar, primeramente, una pregunta que dejamos pendiente. Vimos que a toda fórmula le corresponde una (en realidad varias, dependiendo del arreglo de las letras proposicionales) función veritativa, a saber su tabla de verdad.

Ahora nos preguntamos ¿Toda función veritativa es la tabla de verdad de alguna fórmula? La respuesta es sí. Obviamente no es única ya que cualquier otra fórmula lógicamente equivalente tendrá la misma tabla.

Hay 4 funciones veritativas de aridad 1, veamos:

V	f_1	f_2	f_3	f_4
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

A éstas es fácil ver qué fórmula les corresponden como tablas. Sea $A \in \mathbb{B}$, así

A	f_1	f_2	f_3	f_4
	$(A \vee \neg A)$	A	$(\neg A)$	$(A \& \neg A)$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Funciones veritativas de aridad 2 son en total 16,

V^2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0

Aquí ya no es tan fácil. La segunda mitad, de f_9 a f_{16} , se corresponden con las

negaciones de la otra mitad. Bastaría encontrar las primeras, f_1 a f_8 . Sean $A, B \in \mathbb{B}$, algunas funciones las podemos asociar con tablas ya conocidas,

		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
A	B	α	$A \vee B$?	?	$A \rightarrow B$?	$A \leftrightarrow B$	$A \& B$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Aquí α podría ser cualquier tautología (con tal de que $\mathbb{B}(\alpha) = \{A, B\}$), por ejemplo, $(A \vee \neg A) \& (B \vee \neg B)$.

¿Cómo podríamos encontrar una fórmula cuya tabla fuera, por ejemplo, f_6 ? Específicamente ¿cómo construimos una fórmula, digamos α , cuyas únicas letras proposicionales sean A y B , y tabla de verdad es f_6 , es decir $T_\alpha = f_6$? (**Tabla (a)**)

Lo que se ocurre es separar en dos fórmulas –dos tablas (**Tabla (b)**)– de tal suerte que la disyunción de ellas nos dé la original, digamos $\alpha \Leftrightarrow (\beta_1 \vee \beta_2)$.

		f_6						α	
A	B	¿ α ?		A	B	β_1	β_2	$(\beta_1 \vee \beta_2)$	
1	1	1		1	1	1	0	1	
1	0	0		1	0	0	0	0	
0	1	1		0	1	0	1	1	
0	0	0		0	0	0	0	0	

Tabla (a)

Tabla (b)

Con esto, lo hemos reducido a encontrar a β_1 y a β_2 , lo cual es más sencillo. Por un lado, tenemos que $v(A) = 1$ y $v(B) = 1$ syss $v(A \& B) = 1$; basta que tomemos a $\beta_1 \Leftrightarrow (A \& B)$. Por otro lado, puesto que $v(A) = 0$ y $v(B) = 1$ syss $v(\neg A) = 1$ y $v(B) = 1$ y esto ocurre syss $v^*(\neg A \& B) = 1$, pongamos como $\beta_2 \Leftrightarrow (\neg A \& B)$.

Concretando, si tomamos a $\alpha \Leftrightarrow (A \& B) \vee (\neg A \& B)$, entonces $T_\alpha = f_6$.

Usando lo aprendido aquí, vemos que a f_4 le podemos corresponder la fórmula $\beta \Leftrightarrow (A \& B) \vee (A \& \neg B)$. Podemos formalizar este proceder en la prueba de la

siguiente,

Proposición₁. Si g es una función veritativa de aridad n , entonces hay una $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$, con exactamente n letras proposicionales, la cual tiene como tabla de verdad a α , en símbolos, $T_\alpha = g$.

Prueba. Sea $g : {}^nV \rightarrow V$. Fijemos $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n \in \mathbb{B}$. Tenemos 2 casos:

a). Si g es la función constante 0.

Sea α la fórmula

$$(A_1 \ \& \ \neg A_1) \vee \dots \vee (A_i \ \& \ \neg A_i) \vee \dots \vee (A_n \ \& \ \neg A_n)$$

no es difícil verificar que T_α es la función constante 0.

b). Si g tiene al menos un valor (un renglón) en el cual toma el valor de 1.

Consideremos $s^1, \dots, s^j, \dots, s^k$ una enumeración de **todos** los renglones, tales que $g(s^j) = 1$, con $s^j = \langle s^j_1, \dots, s^j_i, \dots, s^j_n \rangle \in {}^nV$. Siendo congruentes con nuestra notación tenemos que $1 \leq j \leq k$, que $1 \leq k \leq 2^n$ y que $1 \leq i \leq n$. La tabla tendría el siguiente aspecto,

	A_1	...	A_i	...	A_n	g
			\ddots			0
			\vdots			0
s^1	s^1_1	...	s^1_i	...	s^1_n	1
			\ddots			0
			\vdots			0
s^j	s^j_1	...	s^j_i	...	s^j_n	1
			\ddots			0
			\vdots			0
s^k	s^k_1	...	s^k_i	...	s^k_n	1
			\ddots			0
			\vdots			0

Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_k \in \Phi(\mathbb{B})$ tales, que para cada j se tiene,

$$\alpha_j \Leftrightarrow (\beta^j_1 \ \& \ \dots \ \& \ \beta^j_i \ \& \ \dots \ \& \ \beta^j_n)$$

y donde, para cada i se tiene que,

$$\beta_i^j = \begin{cases} A_i & \text{si } s_i^j = 1 \\ \neg A_i & \text{si } s_i^j = 0 \end{cases}$$

Finalmente, sea

$$\alpha \Leftrightarrow (\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_j \vee \dots \vee \alpha_k)$$

Así, $T_\alpha = g$.

†

Los únicos conectivos que utilizamos en la construcción de la fórmula son la conjunción, $\&$, la disyunción, \vee , y la negación, \neg . Hay que observar que la negación solo va aplicada a las letras proposicionales, o mejor dicho, a los bloques.

Por otro lado, si tenemos una fórmula cualquiera y nos fijamos en su tabla, puesto que le corresponde una función veritativa podemos, gracias a la proposición anterior, encontrar otra fórmula lógicamente equivalente a ella, con las características antes mencionadas. Con esto podemos enunciar el siguiente resultado.

Proposición₂. Toda fórmula es lógicamente equivalente a una que tiene las mismas letras proposicionales, cuyas únicas conectivas son la negación, la disyunción y la conjunción, y tal que las negaciones sólo afectan a las letras proposicionales.

Nos interesa considerar como caso particular aquellas \mathbb{B} -fórmulas en las cuales los únicos conectivos que aparecen en ellas –obviamente, sin considerar los que intervienen dentro de los bloques– sean \neg , $\&$ y \vee . Éstas se pueden ver como construidas a partir de \mathbb{B} y solamente usando dichos conectivos.

Definición Recursiva de Fórmula Booleana o Forma Normal:

- I). Todo bloque, $A \in \mathbb{B}$, es una *Fórmula Booleana*
- II). Si α y β son fórmulas booleanas, entonces $(\neg\alpha)$, $(\alpha \& \beta)$ y $(\alpha \vee \beta)$ son *Fórmulas Booleanas*.

Dicho en forma conjuntista, el conjunto de fórmulas booleanas es el \subseteq -menor \mathbb{B} - $\{Neg, Conj, Disy\}$ -Inductivo, sobre EXP_ρ .

Ahora podemos parafrasear la **Proposición₂** diciendo, toda fórmula es lógicamente equivalente a una Forma Normal la cual tiene las mismas letras proposicionales. Se puede dar otra prueba de este resultado, por inducción sobre la formación de fórmulas (**TAREA**).

Dentro de las fórmulas booleanas queremos distinguir aquellas que son disyunciones de conjunciones de bloques o negación de estos.

Definición. Sea $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$. Diremos que α es una (o está escrita en) *Forma Normal Disyuntiva (FND)* si hay $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n \in \Phi(\mathbb{B})$ tales que:

- i). $\alpha \Leftrightarrow (\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_i \vee \dots \vee \alpha_n)$ y
- ii). Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, hay $\beta_1^i, \dots, \beta_j^i, \dots, \beta_m^i \in \Phi(\mathbb{B})$ tales que
 - a). $\alpha_i \Leftrightarrow (\beta_1^i \& \dots \& \beta_j^i \& \dots \& \beta_m^i)$ y
 - b). Para cada i, j , se tiene que β_j^i es un bloque o la negación de un bloque.

Con esta notación podemos reformular nuestras proposiciones anteriores:

Corolario₃. Si g es una función veritativa de aridad n , entonces hay una \mathbb{B} -fórmula α escrita en Forma Normal Disyuntiva con exactamente n letras proposicionales tal que $T_\alpha = g$.

Corolario₄. Toda fórmula es lógicamente equivalente a otra escrita en Forma Normal Disyuntiva y que tiene las mismas letras proposicionales.

También se podría tener la forma *dual* de FND e.d. se puede definir aquellas que son conjunciones de disyunciones de bloques o negación de éstos. A las cuales llamaremos *Formas Normales Conjuntivas (FNC)*. Y por supuesto se tiene el correspondiente resultado (**TAREA**).