

## Conjunto Mínimo de Conectivos

Sea  $\mathbb{C} = \{ \neg, \&, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$  y si  $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$ , pondremos

$$\mathbb{C}(\alpha) = \{ \diamond \in \mathbb{C} / \diamond \text{ aparece en } \alpha \}$$

**Definición<sub>1</sub>.** Sea  $\mathbb{D}$  un conjunto de conectivos, es decir  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ . Diremos que  $\mathbb{D}$  es un *Conjunto Completo o Suficiente de Conectivos* *sys* para cada  $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$ , hay una  $\beta \in \Phi(\mathbb{B})$  tal, que

1.  $\alpha \equiv \beta$
2.  $\mathbb{B}(\beta) = \mathbb{B}(\alpha)$  y
3.  $\mathbb{C}(\beta) \subseteq \mathbb{D}$

Sabemos que  $\{ \neg, \&, \vee \}$  forma un conjunto completo de conectivos (toda fórmula tiene una *FND* o una *FNC*, lógicamente equivalente a ella y con las mismas letras proposicionales). Pero podemos considerar menos número de conectivos,

**Proposición<sub>1</sub>.** Los conjuntos  $\{ \neg, \& \}$ ,  $\{ \neg, \vee \}$  son conjuntos completos de conectivos.

**Prueba:** Sea  $\alpha \in \Phi(\mathbb{B})$ . Consideremos una *FND* lógicamente equivalente a  $\alpha$ , digamos  $\alpha'$ .

Ahora, usando los metateoremas de sustitución y los siguientes hechos:

$$\gamma \vee \delta \equiv \neg(\neg\gamma \& \neg\delta) \quad \text{y} \quad \gamma \& \delta \equiv \neg(\neg\gamma \vee \neg\delta)$$

Podemos obtener una fórmula lógicamente equivalente a  $\alpha'$ , digamos  $\beta$ , la cual está construida sólo con los conectivos exigidos. Finalmente,  $\alpha \equiv \beta$ . †

¿Se puede considerar menos de éstos? La respuesta es no.

**Proposición<sub>2</sub>.** Los conjuntos de conectivos  $\{ \neg \}$ ,  $\{ \& \}$ ,  $\{ \vee \}$  no son completos.

**Prueba: TAREA.** †

Esto motiva la siguiente,

**Definición<sub>2</sub>.** Sea  $\mathbb{D}$  un conjunto de conectivos, es decir,  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ . Diremos que  $\mathbb{D}$  es un *Conjunto Mínimo de Conectivos*, abreviado como *CMC*, *sys*

- i).  $\mathbb{D}$  es un conjunto completo de conectivos, y
- ii). (Minimalidad)

Si  $\mathbb{D}' \subsetneq \mathbb{D}$ , entonces  $\mathbb{D}'$  no cumple con i).

Con esta notación  $\{\neg, \&\}$  y  $\{\neg, \vee\}$  son CMC. ¿Hay otros CMC?

**Proposición<sub>3</sub>.** El conjunto  $\{\neg, \rightarrow\}$  es un CMC.

**Prueba:** Una prueba similar a la dada en la proposición anterior, pero usando los hechos:

$$\gamma \vee \delta \equiv \neg\gamma \rightarrow \delta \qquad \text{y} \qquad \gamma \& \delta \equiv \neg(\gamma \rightarrow \neg\delta)$$

Con esto tenemos la suficiencia. La minimalidad se deja al lector. †

**Tarea.** Pruebe las siguientes afirmaciones:

1. Los conjuntos de conectivos  $\{\rightarrow\}$ ,  $\{\leftrightarrow\}$  no son suficientes (completud).
2.  $\{\neg, \leftrightarrow\}$  no es un CMC.
3. Cualquier conectivo ternario es expresable en términos de conectivos binarios y la negación. ¿Qué concluyes con este hecho?
4. No hay un conectivo uno-ario que por si solo sea completo.

¿Habrá una función veritativa de aridad 2 que por sí sola pueda expresar cualquier fórmula? o dicho de otra manera ¿Hay un conectivo binario que forme por si solo un CMC?

La respuesta es **sí**. De hecho hay dos.

**Definición<sub>3</sub>.** Sean  $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B})$ . Los valores de verdad que toman los conectivos binarios  $\downarrow$  y  $|$ , quedan definidos por la siguiente tabla:

$\alpha$	$\beta$	$(\alpha \downarrow \beta)$	$(\alpha   \beta)$
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1

Para darnos una idea de cómo trabajan estos, veamos algunas equivalencias lógicas.

**Proposición<sub>4</sub>.** Sean  $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B})$ . Las siguientes fórmulas son lógicamente equivalentes:

1.
  - i).  $\alpha \downarrow \beta$
  - ii).  $(\neg\alpha) \& (\neg\beta)$  (*FND*)
  - iii).  $\neg(\alpha \vee \beta)$

Debido a **1.ii)** se debe el nombre de *Ni* al conectivo  $\downarrow$  y por **1.iii)**, también se le da el nombre de *NOR*.

2.
  - i).  $\alpha | \beta$
  - ii).  $(\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$  (*FNC*)
  - iii).  $\neg(\alpha \& \beta)$

A esto último se debe que al conectivo  $|$  se le llame *NAND* y por **2.ii)** también se le da el nombre de *Negación Alternativa*. Otro nombre que se le da es *Barra* o *Raya de Sheffer*.

**Proposición<sub>5</sub>.** Los conjuntos  $\{\downarrow\}$  y  $\{| \}$  son *CMC*.

**Prueba:** Basta ver la suficiencia y esta la obtenemos de los siguientes hechos:

$$\begin{aligned} \downarrow ] \quad & \neg\alpha \equiv \alpha \downarrow \alpha \\ & \alpha \& \beta \equiv (\alpha \downarrow \alpha) \downarrow (\beta \downarrow \beta) \\ & \alpha \vee \beta \equiv (\alpha \downarrow \beta) \downarrow (\alpha \downarrow \beta) \\ | ] \quad & \neg\alpha \equiv \alpha | \alpha \\ & \alpha \& \beta \equiv (\alpha | \beta) | (\alpha | \beta) \\ & \alpha \vee \beta \equiv (\alpha | \alpha) | (\beta | \beta) \end{aligned}$$

†

**TAREA.** Expresar los conectivos  $\rightarrow$  y  $\leftrightarrow$  en términos de los nuevos,  $\downarrow$  y  $|$ .

¿Habrá otros conectivos binarios que por sí solos sean suficientes?

Consideremos un conectivo binario, digamos  $*$  y supongamos que  $\{ * \}$  es completo. La pregunta que tenemos que responder es, dada  $v$ , una asignación de valores de verdad a los bloques y si  $\alpha, \beta \in \Phi(\mathbb{B})$  ¿Qué valor de verdad toma la fórmula  $(\alpha * \beta)$ ? es decir, ¿  $v^*(\alpha * \beta) = ?$  El valor debe estar en función de los valores tomados por  $\alpha$  y por  $\beta$ .

$\alpha$	$\beta$	$\alpha * \beta$
1	1	?
1	0	?
0	1	?
0	0	?

Ahora bien, **NO** puede ser el caso:

$\alpha$	$\beta$	$\alpha * \beta$
1	1	1

Pues, no podríamos expresar la negación:

$P$	$P * P$	$\neg P$
1	1	0

Por lo que:

$\alpha$	$\beta$	$\alpha * \beta$
1	1	0

En forma análoga, concluimos que tenemos el siguiente caso:

$\alpha$	$\beta$	$\alpha * \beta$
0	0	1

Por lo tanto,  $*$  tiene como tabla alguna de las siguientes,

$\alpha$	$\beta$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1

Reconocemos a  $f_1 \Leftrightarrow (\alpha \downarrow \beta)$  y a  $f_4 \Leftrightarrow (\alpha | \beta)$ . Y también a  $f_2 \Leftrightarrow (\neg\alpha)$  y a  $f_3 \Leftrightarrow (\neg\beta)$  pero estos últimos no son suficientes.

**Proposición<sub>6</sub>.** Los únicos conectivos binarios que por si solos forman un CMC son el NOR y el NAND.

†