# Coloreando Gráficas

## UNA APLICACIÓN DEL

## METATEOREMA DE COMPACIDAD

**Definición$_1$**. $\mathcal{G}$ es una gráfica syss $\mathcal{G} = \langle G, R \rangle$ donde

**1**. $G \neq \emptyset$

**2**. $R \subseteq G \times G$

**a**. $R$ es irreflexiva sobre $G$ : Para todo $a \in G,\ \langle a, a \rangle \notin R$

**b**. $R$ es simétrica sobre $G$ : Para todos $a, b \in G,$
si $\langle a, b \rangle \in R,$ entonces $\langle b, a \rangle \in R$

**Notación**: Sea $\mathcal{G} = \langle G, R \rangle$ una gráfica.

- A los elementos de $G,$ les llamaremos *Nodos o Vértices de* $\mathcal{G}$.
- A $R$ le llamaremos *el conjunto de Aristas de* $\mathcal{G}$.
- Si $\langle a, b \rangle \in R,$ es decir, si $\langle a, b \rangle$ es una arista, diremos que $a$ y $b$ son *Vértices Adyacentes.*

**Definición$_2$**. $\langle G', R' \rangle$ es una *Subgráfica* de la gráfica $\langle G, R \rangle$ syss

**1**. $\emptyset \neq G' \subseteq G.$ Y

**2**. $R' \subseteq R,$ es decir, para todos $a, b \in G',\ \langle a, b \rangle \in R'$ syss $\langle a, b \rangle \in R.$

**Definición$_3$**. Sea $k \in \mathbb{Z}^+.$ Una $k$–*Coloración* de una gráfica $\mathcal{G}$ es una asignación de $k$ colores a los vértices de $\mathcal{G}$ de tal suerte que vértices adyacentes de $\mathcal{G}$ no tengan el mismo color.

**Ejemplos**:

**1**. Hay gráficas que no son $3$–coloreables.

**2**. Toda gráfica es $5$–coloreable (Teorema “conocido”)

### ¿Toda gráfica es $4$–coloreable?

**Proposición**. (*De Bruijn–Erdös*, 1951)
Si toda subgráfica finita de una gráfica $\mathcal{G}$ es $k$–coloreable, entonces $\mathcal{G}$ es $k$–coloreable.

La prueba original, usa Inducción Transfinita y un poco de Elección. Nosotros usaremos el Metaterema de Compacidad.

**Prueba**: Sea $\mathcal{G} = \langle G, R \rangle$ una gráfica. Basta ver el caso $k = 4.$ Consideremos los colores, **N**egro, **V**erde, **A**zul y **B**lanco. Construimos un Lenguaje Formal de Primer Orden como sigue,

$$\text{Sea } \rho = \left\{N\ ,\ V, A, B\right\} \cup \emptyset \cup \left\{c_a\ /\ a \in G\right\}$$

donde, $\left\{N\ ,\ V, A, B\right\} = \mathcal{P}_1$ y $\left\{c_a\ /\ a \in G\right\} = \mathcal{C}.$

Consideremos el lenguaje asociado a $\rho,\ \mathcal{L}_\rho.$ Ahora, sus fórmulas, $FRM_\rho.$ De éstas tomamos los bloques, $\mathbb{B}_\rho,$ y finalmente reconstruimos las fórmulas a partir de estos, $\Phi(\mathbb{B}_\rho).$

Tengamos en mente que la gráfica $\mathcal{G}$ la podemos ver como una $\rho$–interpretación. Donde $N^{\mathcal{G}} =$ **N**egro, $V^{\mathcal{G}} =$ **V**erde, $A^{\mathcal{G}} =$ **A**zul, $B^{\mathcal{G}} =$ **B**lanco y para cada $a \in G,\ c_a{}^{\mathcal{G}} = a.$

Ahora, definimos $\Sigma \subseteq \Phi(\mathbb{B}_\rho),$ como sigue:

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$$

donde:

**a**). (Cada vértice tiene almenos un color)

$$\Sigma_1 = \left\{N(c_a) \vee V(c_a) \vee A(c_a) \vee B(c_a)\ /\ a \in G\right\}$$

**b**). (Cada vértice tiene a lo más un color)

$$\begin{aligned}\Sigma_2 = \ & \left\{\neg\left(N(c_a)\ \&\ V(c_a)\right)\ /\ a \in G\right\} \\ \cup\ & \left\{\neg\left(N(c_a)\ \&\ A(c_a)\right)\ /\ a \in G\right\} \\ \cup\ & \left\{\neg\left(N(c_a)\ \&\ B(c_a)\right)\ /\ a \in G\right\} \\ \cup\ & \left\{\neg\left(V(c_a)\ \&\ A(c_a)\right)\ /\ a \in G\right\} \\ \cup\ & \left\{\neg\left(V(c_a)\ \&\ B(c_a)\right)\ /\ a \in G\right\} \\ \cup\ & \left\{\neg\left(A(c_a)\ \&\ B(c_a)\right)\ /\ a \in G\right\}\end{aligned}$$

**c**). (Vértices adyacentes no tienen el mismo color).

$$\begin{aligned} \Sigma_3 = \ & \left\{\neg\Big(N(c_a) \ \& \ N(c_b)\Big) \ / \ a,b \in G \text{ y } \langle a,b\rangle \in R\right\} \\ & \cup \ \left\{\neg\Big(V(c_a) \ \& \ V(c_b)\Big) \ / \ a,b \in G \text{ y } \langle a,b\rangle \in R\right\} \\ & \cup \ \left\{\neg\Big(A(c_a) \ \& \ A(c_b)\Big) \ / \ a,b \in G \text{ y } \langle a,b\rangle \in R\right\} \\ & \cup \ \left\{\neg\Big(B(c_a) \ \& \ B(c_b)\Big) \ / \ a,b \in G \text{ y } \langle a,b\rangle \in R\right\} \end{aligned}$$

**Af$_1$**. Si $\Sigma$ es satisfacible, entonces $\mathcal{G}$ es $4$–coloreable.

Sea $v$ una asignación de valores de verdad a los bloques, es decir $v \in {}^{\mathbb{B}_\rho}2,$ tal que satisfaga a $\Sigma.$ Pintemos ahora la gráfica con ayuda de $v.$

Sea $a \in G,$ Fijémonos en $N(c_a),\ V(c_a),\ A(c_a),\ B(c_a) \in \mathbb{B}_\rho.$ La asignación $v$ les da el valor de $1$ o de $0$ a cada una. Pero solo a una de ellas le puede dar el valor de $1$ y a las otras forzosamente, el valor de $0.$ Esto se debe a que $v$ satisface a $\Sigma_1 \cup \Sigma_2.$

La coloración de $\mathcal{G}$ es la inducida por la interpretación aplicada al único bloque que toma el valor de $1$ bajo la asignación. Por ejemplo, si $a \in G,$ nos fijamos en su nombre, $c_a,$ y en la letra predicativa, digamos $P \in \mathcal{P}_1,$ tal que la asignación $v$ le da el valor de $1$ al bloque $P(c_a),$ es decir $v(P(c_a)) = 1$ y entonces pintamos del color $P^{\mathcal{G}}$ al vértice $a.$

Hasta ahora podemos pintar cada vértice de un solo color. El hecho de que vértices adyacentes no tienen el mismo color, se debe a que $v$ satisface a $\Sigma_3.$

**Af$_2$**. $\Sigma$ es finitamente satisfacible.

Sea $\Gamma \subseteq \Sigma$ finito. Veamos que $\Gamma$ es satisfacible. Consideremos los siguientes conjuntos,

$$\mathbb{P} = \left\{P(C_a) \in \mathbb{B}_\rho \ / \ P \in \mathcal{P}_1 \text{ y } P(C_a) \text{ aparece en } \alpha \text{ para algún } \alpha \in \Gamma\right\}$$

$$G' = \left\{a \in G \ / \ P(C_a) \in \mathbb{P}\right\}$$

y $$R' = \left\{\Big\langle a,\ b \Big\rangle \in R \ / \ a,\ b \in G'\right\}$$

Dado que $\mathbb{P}$ es finito, también lo es $G'.$ Resultando que, $\mathcal{G}' = \langle G', R'\rangle$ es una subgráfica **finita**, de la gráfica $\langle G, R\rangle.$

Por hipótesis al ser $\mathcal{G}'$ finita, es $4$–coloreable. Supongamos pues, que ya la tenemos coloreada y definimos en base a ello una asignación de valores de verdad para todos los bloques. Sea

$$v : \mathbb{B}_\rho \rightarrow \{ 0, 1 \}$$

$$\text{si } A \in \mathbb{B}_\rho,\ v(s) = \begin{cases} 1 & \text{Si } A \rightleftharpoons P(C_a) \text{ con } P(C_a) \in \mathbb{P} \text{ y } a \text{ está pintado del color } P^{\mathcal{G}} \\ \text{ó} & \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obsérvese que para $a \in G'$ y $P \in \mathcal{P}_1$ se tiene:

$v(P(C_a)) = 1$ syss $a$ está pintado del color $P^{\mathcal{G}}$ ............................$(*)$

Veamos que $v$ Satisface a $\Gamma$, e.d. si $\alpha \in \Gamma$, entonces $v^*(\alpha) = 1$. Tenemos 3 casos posibles:

**i**) $\alpha \in \Sigma_1$ : Tenemos que $v^*(\alpha) = 1$, pues cada nodo de $G'$ está pintado de algún color.

**ii**) $\alpha \in \Sigma_2$ : Aquí, $v^*(\alpha) = 1$ pues los nodos de $G'$ no están pintados de dos colores. Y

**iii**) $\alpha \in \Sigma_3$ : Ya que nodos adyacentes en la gráfica $\mathcal{G}'$ no tienen la misma coloración, $v^*(\alpha) = 1$.

Finalmente, si aplicamos el **M**eta**T**eorema de **C**ompacidad a nuestra **Af₂** tenemos que es cierto el antecedente de la **Af₁** y por tanto tenemos que la gráfica $\mathcal{G}$ es 4–coloreable.

†