# I. SISTEMAS AXIOMÁTICOS

**I.1.** ESTRUCTURA y MODELOS DE LOS SISTEMAS AXIOMÁTICOS.
Ejercicios.

**I.2.** CONSISTENCIA.
Ejercicios.

**I.3.** INDEPENDENCIA.
Ejercicios.

**I.4.** COMPLETEZ.
Ejercicios.

**M.C. Rafael Rojas Barbachano**

# I. SISTEMAS AXIOMÁTICOS.

Casi todas las ramas de la matemática tienen como base fundamental de organización, a lo que recientemente se ha llamado, Sistema Axiomático.

Nuestro objetivo, en este capítulo, es aclarar y estudiar formalmente, la estructura y propiedades de dichos sistemas. Esto será de gran utilidad para los capítulos **II** y **IV**, donde construiremos sistemas axiomáticos para las geometrías euclidiana e hiperbó1ica, respectivamente.

Partiendo de tres sistemas particulares (llamados $\mathbf{SA_1}$, $\mathbf{SA_2}$, $\mathbf{SA_3}$) mostraremos dos de las tres propiedades principales que deben cumplir los sistemas axiomáticos: la *Consistencia* y la *Independencia* del conjunto de postulados. En lo que respecta a la tercera propiedad, la *Completez*, daremos solamente la definición y un criterio, que deben de cumplir los sistemas para tener dicha propiedad.

Las tres propiedades -consistencia, independencia, completez- serán atacados por medio de otro concepto, concepto íntimamente ligado con los sistemas: el concepto de *Modelo*; Vg. daremos tres criterios, uno para cada propiedad, basados en el concepto de modelo.

Así, la primera sección tratará sobre la estructura y los modelos de los sistemas axiomáticos, y las siguientes secciones de las propiedades de estos: consistencia, independencia y completez.

## I. 1. ESTRUCTURA Y MODELOS DE LOS SISTEMAS AXIOMÁTICOS

Antes de dar la estructura de los Sistemas Axiomáticos, veremos el concepto moderno de *función proposicional*[1].

Consideremos las tres siguientes oraciones:

**(1)** Karl Marx es el autor de El Capital.
**(2)** $\sqrt{2}$ es un número racional.
**(3)** $x$ es $y$.

Cada una de estas oraciones tiene forma, y además la misma forma. Los **(1)** y **(2)** tienen tanto contenido como forma, en cambio **(3)** solo tiene forma. **(1)** y **(2)** son proposiciones, es decir se pueden tachar de falsas o verdaderas, en este caso, **(1)** es verdadero y **(2)** es falso. Estrictamente hablando, **(3)** no es una proposición; pues al no hablar de nada concreto, no es ni falso ni verdadero, pero tiene forma de proposición.

[1] La importancia de este concepto fue señalada por Bertrand Russell.

A este tipo de oraciones, o formas, se les ha dado el nombre de funciones proposicionales, pues si en la forma: *x* es una *y*, sustituimos las variables *x* y *y* por términos de significado concreto, podemos obtener proposiciones. Es evidente que algunas sustituciones de *x* y *y* convierten a la función proposicional en algo que no tiene mucho sentido, dichos significados se considerarán inadmisibles.

Una función proposicional puede contener cualquier número, finito, de variables. La función aquí considerada es de dos variables y tiene una infinidad de verificadores.

No hay necesidad de que las variables de una función proposicional se representen por símbolos tales como *x*, *y*,..., pueden ser palabras corrientes. Así, si en un discurso apareciera una oración cuyos términos fueran palabras corrientes sin indicación en cuanto a los sentidos en que dichas palabras habrían de entenderse, entonces en ese discurso la oración será realmente una función proposicional más bien que una proposición, y, en interés de la claridad, los términos indefinidos podrían sustituirse mejor por símbolos tales como *x*, *y*,...

Hay que hacer patente, que las proposiciones que aquí consideraremos, están regidas por las siguientes leyes:

*Ley del Tercero Excluido:* Cualquier proposición es verdadera o falsa.

*Ley de no-contradicción:* Ninguna proposición puede ser al mismo tiempo verdadera y falsa.

En el caso en que **P** sea una proposición y escribamos “**P** y no-**P**”, estrictamente hablando, no decimos que sea una proposición falsa, estamos diciendo algo y retractándonos de ello.

Pasemos ahora a la exposición del procedimiento axiomático.

En cualquier discurso lógico, se intenta definir explícitamente los elementos del discurso, las relaciones entre estos elementos y las operaciones que han de realizarse con ellos. No obstante, dichas definiciones han de emplear otros elementos, relaciones y operaciones, y estos también están sujetos a definiciones explícitas. Si estos se definen, lo tienen que ser nuevamente con referencia a más elementos, relaciones y operaciones. Este proceso no puede seguir infinitamente hacia atrás por lo cual tenemos dos alternativas a tomar; o bien cortamos la cadena de definiciones en algún lado, o bien la hacemos circular. Como la circularidad no se tolera en un discurso lógico, las definiciones deben llevarse a cerrar en algún punto, por lo tanto, es necesario que a uno o más elementos, relaciones y operaciones no se les dé definición explícita. Estos se conocen con el nombre de *términos primitivos* o *términos no-definidos* del discurso.

Igualmente, hay un esfuerzo para deducir lógicamente los enunciados del discurso y nuevamente, para empezar y evitar además el círculo vicioso, uno o más de los enunciados deben permanecer completamente no demostrados. Estos se conocen como *Postulados* ó *Axiomas*[2] del discurso.

Un discurso lógico tal como lo hemos presentado, debe satisfacer el siguiente patrón:

[2] Actualmente no existe diferencia cualitativa entre un Axioma y un Postulado, se consideran como sinónimos.

## PATRON DE UN SISTEMA AXIOMATICO

**(A)** El discurso contiene un conjunto de términos técnicos: elementos, relaciones entre elementos y operaciones a realizarse con los elementos; que deliberadamente se eligen como términos no-definidos. Estos son los *Elementos*, las *Relaciones* y las *Operaciones Primitivas* del discurso, y todas ellas se engloban bajo el nombre de *Términos Primitivos*.

**(B)** Todos los demás términos técnicos del mismo se definen explícitamente por medio de los términos primitivos.

**(C)** El discurso contiene un conjunto de enunciados relacionados con los términos primitivos que deliberadamente se escogen como enunciados no demostrados. Estos se llaman *Postulados*, $\mathcal{P}$, del discurso.

**(D)** Todos los demás enunciados (relacionados tanto con los términos primitivos como con los definidos) del discurso se deducen lógicamente de los postulados. Estos enunciados se llaman *Teoremas*, $\mathcal{T}$, del discurso.

**(E)** Para cada teorema $\boldsymbol{T_i}$, del discurso, hay un enunciado correspondiente (que puede expresarse o no, formalmente) que asegura que el teorema $\boldsymbol{T_i}$ es implicado lógicamente de los postulados $\mathcal{P}$ (A menudo el enunciado correspondiente aparece al final de la demostración del teorema en unas palabras como: En consecuencia, el teorema...; ó Esto completa la demostración, etc.[3]).

Lo primero que hay que observar es que los términos primitivos, siendo indefinidos, pueden pensarse como variables. Así, podrían sustituirse (si es que no se ha hecho ya) los elementos primitivos por $x_1, x_2,...$, las relaciones primitivas por $R_1, R_2,...$ y las operaciones primitivas por $O_1, O_2,...$

Lo segundo a observar es que los postulados, $\mathcal{P}$, como son enunciados relacionados con los términos primitivos, son nada menos que funciones proposicionales.

Y lo último que ha de observarse es que los teoremas, $\mathcal{T}$, como no son más que implicaciones lógicas de los postulados $\mathcal{P}$, también son funciones proposicionales.

Por lo tanto, esto nos conduce a un hecho importante, una vez que se haya observado que los términos primitivos son variables, tanto los postulados como los teoremas de un discurso lógico no son proposiciones sino funciones proposicionales.

Como los postulados y los teoremas de un discurso lógico son funciones proposicionales; es decir, son enunciados que solo tienen forma y no contenido, parecería que todo el discurso es algo vacío y completamente desprovisto de verdades o falsedades. Sin embargo, éste no es el caso pues por **(E)** del patrón postulacional tenemos el enunciado importante:

**(F)** Los postulados $\mathcal{P}$ implican los teoremas $\mathcal{T}$.

Ahora bien **(F)** nos asegura algo concreto o definido, es verdadero o falso y, por tanto, una proposición: verdadera si los teoremas $\mathcal{T}$ se implican o desprenden de hecho por los

[3] En geometría elemental aparece: Q. E. D., es decir, *Quod erat demostrandum* (que era lo que se quería demostrar).

postulados $\mathcal{P}$, y falso si no lo son. El enunciado **(F)** es precisamente para lo que el discurso se ha diseñado; es la única meta del discurso y la excusa para hacerlo.

No debe pensarse, al construir un sistema axiomático, que podemos fijar un conjunto de símbolos para los términos indefinidos y luego dar como postulados un conjunto arbitrario de enunciados. Aparte de que los postulados hablan de como se deben comportar los términos indefinidos (algunos matemáticos tienden a decir que los postulados son definiciones implícitas de los términos primitivos), hay ciertas propiedades requeridas y deseadas que deberán cumplir. Estas propiedades son *Independencia*, *Consistencia* y *Completez*, conceptos que veremos con detalle en las próximas secciones.

Pasemos ahora a ver lo que es un modelo para un sistema axiomático.

**I.1.1. DEFINICION.** Por una *Interpretación* de un sistema axiomático, entenderemos una asignación de significados a los términos técnicos no-definidos, o sea a los términos primitivos del discurso, de tal modo que los postulados se convierten en proposiciones (es decir, en verdaderos ó falsos).

**I.1.2. DEFINICION.** Una interpretación que hace verdadero un postulado, diremos que *Satisface* tal postulado.

**I.1.3. DEFINICION.** Una interpretación la cual satisface todos los postulados de un sistema axiomático, diremos que es un *Modelo* para el conjunto de postulados, o para el sistema.

Es claro que no cualquier interpretación es un modelo, e igualmente claro, es que un sistema axiomático podría tener ninguno, uno o varios modelos.

Debido a que, los teoremas son deducidos a partir de los postulados, por **(F)**, y los métodos de demostración están basados en leyes lógicas, no es posible que enunciados verdaderos, en un modelo dado, impliquen enunciados falsos[4], entonces

**1.1.4. PROPOSICION.** Un modelo satisface los teoremas de un sistema axiomático.

Pasemos a dar ejemplos de sistemas axiomáticos y modelos para ellos.

**1.1.5. DEFINICION.** Sistema Axiomático **$SA_1$**.

Los términos primitivos son:

Los elementos: *puntos* y *rectas*
La relación entre elementos: *sobre*

El conjunto de Postulados es el siguiente:

**$P_1$** : Existe al menos una recta.
**$P_2$** : Si $\boldsymbol{l}$ es una recta, entonces existen al menos tres puntos sobre $\boldsymbol{l}$.
**$P_3$** : Si $\boldsymbol{l}$ es una recta, entonces existe un punto $P$ que no está sobre $\boldsymbol{l}$.

[4] Es trabajo de la lógica matemática garantizar este hecho.

$\mathbf{P_{4a}}$ : Si $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ son dos puntos cualesquiera, entonces existe al menos una recta que pasa por $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$.
$\mathbf{P_{4b}}$ : Si $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ son dos puntos cualesquiera, entonces existe a lo más una recta que pasa por $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$.

Una cosa que hay que aclarar es que es costumbre usar algunos sinónimos para la relación *sobre*, y que ya hemos usado en los postulados $\mathbf{P_{4a}}$ y $\mathbf{P_{4b}}$, así:

Si un punto $\boldsymbol{P}$ está sobre una recta $\boldsymbol{l}$, entonces diremos indistintamente: $\boldsymbol{l}$ pasa a través de $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{l}$ pasa por $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{l}$ contiene a $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}$ es un elemento de $\boldsymbol{l}$, etc.

Debido a que nuestros objetivos son otros, solamente daremos una lista de teoremas sin dar demostración de estos.

**I.1.6. PROPOSICION.** Los siguientes enunciados son enunciados deducibles de los postulados, es decir, son teoremas, del sistema $\mathbf{SA_1}$:

**a)** Existen al menos siete puntos y siete rectas.
**b)** Dos rectas tienen a lo más un punto en común.
**c)** No todas las rectas pasan a través del mismo punto.
**d)** Por cada punto pasan al menos tres rectas.

Antes de pasar a dar modelos para $\mathbf{SA_1}$ daremos otros dos sistemas axiomáticos; estos nuevos consistirán en agregar nuevos postulados al $\mathbf{SA_1}$.

**I.1.7. DEFINICION.** El sistema axiomático $\mathbf{SA_2}$, será el que se obtiene al agregar al conjunto de postulados de $\mathbf{SA_1}$ los siguientes dos enunciados:

$\mathbf{P_{5a}}$ : Si $\boldsymbol{l}$ es una recta y $\boldsymbol{P}$ un punto que no está en $\boldsymbol{l}$, entonces existe al menos una recta, $\boldsymbol{m}$, que pasa por $\boldsymbol{P}$ y que no tiene puntos en común con $\boldsymbol{l}$.
$\boldsymbol{P_{5b}}$ : Si $\boldsymbol{l}$ es una recta y $\boldsymbol{P}$ un punto que no está en $\boldsymbol{l}$, entonces existe a lo mas una recta, $\boldsymbol{m}$, que pasa por $\boldsymbol{P}$ y que no tiene puntos en coman con $\boldsymbol{l}$.

Debido a que $\mathbf{SA_1}$ y $\mathbf{SA_2}$ tienen en común los postulados $\mathbf{P_1}$ a $\mathbf{P_{4b}}$, entonces todo teorema de $\mathbf{SA_1}$ es también un teorema en $\mathbf{SA_2}$; otros teoremas para $\mathbf{SA_2}$ quedan dados en la siguiente

**I.1.8. PROPOSICION.** Los siguientes enunciados son teoremas en el sistema $\mathbf{SA_2}$:

**e)** Existen al menos nueve puntos y doce rectas.
Diremos que dos rectas $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{m}$ son *Paralelas* si no contienen puntos en común[5].

**f)** Existen al menos dos rectas paralelas a una recta dada.
**g)** Si una recta, distinta de dos rectas paralelas, interseca una de las dos paralelas, entonces interseca a la otra.
**h)** Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre si.

Pasemos al siguiente sistema.

[5] Aquí estamos dando una definición explícita de una relación entre términos indefinidos, a saber la relación *"ser paralelas"* entre rectas, ver el **(B)** del patrón de un sistema axiomático.

**I.1.9. DEFINICION.** Llamaremos $\mathbf{SA_3}$ al sistema axiomático obtenido al agregar a los postulados del Sistema $\mathbf{SA_1}$ el enunciado:

$\mathbf{P_{5'}}$ : Si $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{m}$ son dos rectas, entonces existe al menos un punto $\boldsymbol{P}$ el cual está contenido en las dos, en $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{m}$.

La misma observación que hicimos al respecto de los teoremas de $\mathbf{SA_1}$ en $\mathbf{SA_2}$ es válido para $\mathbf{SA_3}$, es decir, la proposición **I.1.6** es cierta en $\mathbf{SA_3}$.

Pasemos a construir algunos modelos para estos sistemas axiomáticos. Lo primero que debemos notar es que cualquier modelo para los sistemas $\mathbf{SA_2}$ y $\mathbf{SA_3}$ es un modelo para $\mathbf{SA_1}$ (¿por qué?), otro aspecto es que si queremos dar una interpretación que sea un modelo, por ejemplo para $\mathbf{SA_2}$, tiene que ser de tal forma que sus teoremas sean verdaderos. Vg. sería inútil, en virtud de la proposición **I.1.8.e)**, buscar un modelo para $\mathbf{SA_2}$, entre las interpretaciones, que tuvieran menos de nueve rectas.

Daremos interpretaciones para los sistemas $\mathbf{SA_2}$ y dejaremos al lector probar que son modelos.

**I.1.10. PROPOSICION**. Considere los siguientes conjuntos de letras:

$$\{A,B,X\}, \{A,C,Z\}, \{A,D,Y\}, \{B,C,Y\}, \{B,D,Z\}, \{C,D,X\} \text{ y } \{X,Y,Z\}$$

Entonces, si interpretamos *punto* por cualquiera de las letras $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$; *recta* por los conjuntos antes mencionados y la relación *sobre* por pertenecer; la interpretación así dada, es un modelo para el sistema $\mathbf{SA_3}$. Lo llamaremos el modelo $\mathbf{M_3.I}$.

Para una *visualización* de este modelo, podemos considerar (Figura **1.1.1**), el cuadrángulo completo **ABCD**, con sus tres puntos diagonales, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$, las seis rectas determinadas por los vértices y otra *recta* que es la que une los puntos diagonales.

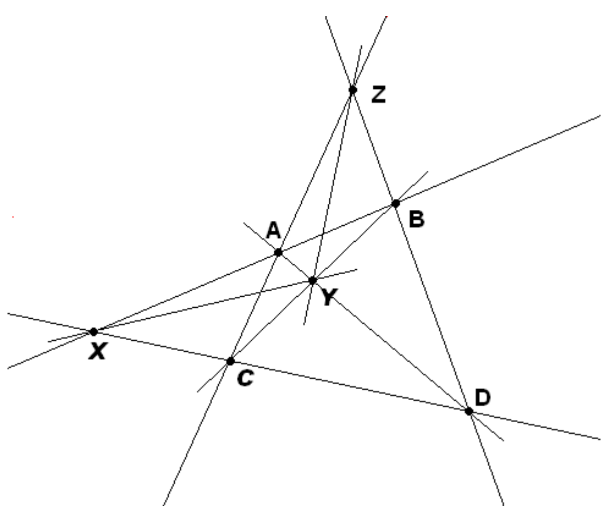


**Fig. 1.1.1**

**I.1.11. PROPOSICION.** Considere las siguientes listas:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 1 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 1 | 2 | 3 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Entonces, si en el sistema $\mathbf{SA_3}$ interpretamos *punto* por cualquier entero entre 1 y 13, *recta* por cualquier columna de la lista anterior, y la relación *sobre* por pertenecer; dicha interpretación resulta ser un modelo. Lo llamaremos $\mathbf{M_3.II}$.

**I.1.12. PROPOSICION.** Si convenimos que puntos diametralmente opuestos sobre la superficie de una esfera son el mismo, e interpretamos *punto* por puntos sobre la esfera, *recta* por circunferencias maximales; es decir, circunferencias que estando sobre la superficie de la esfera, su centro coincide con el de la misma y finalmente interpretamos la relación *sobre* por pertenecer, tenemos un modelo para el sistema $\mathbf{SA_3}$. Lo llamaremos $\mathbf{M_3.III}$.

Finalmente pasemos a dar tres modelos para el sistema axiomático $\mathbf{SA_2}$.

**I.1.13. PROPOSICION.** La Geometría Euclidiana Ordinaria proporciona un modelo para el sistema $\mathbf{SA_2}$. Lo llamaremos $\mathbf{M_2.IV}$.

**I.1.14. PROPOSICION.** Considere los siguientes conjuntos de letras:

$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$, $\{\boldsymbol{D},\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}\}$, $\{\boldsymbol{G},\boldsymbol{H},\boldsymbol{I}\}$, $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{D},\boldsymbol{I}\}$, $\{\boldsymbol{B},\boldsymbol{F},\boldsymbol{I}\}$, $\{\boldsymbol{C},\boldsymbol{E},\boldsymbol{I}\}$,

$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{E},\boldsymbol{G}\}$, $\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{F},\boldsymbol{H}\}$, $\{\boldsymbol{B},\boldsymbol{D},\boldsymbol{G}\}$, $\{\boldsymbol{B},\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}\}$, $\{\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{H}\}$, $\{\boldsymbol{C},\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}\}$.

Entonces, si interpretamos *punto* por cualquiera de las letras ***A***, ***B***, ***C***, ***D***, ***E***, ***F***, ***G***, ***H*** ó ***I***, *recta* por cualquier conjunto de la lista anterior, y la relación *sobre* por elemento, dicha interpretación es un modelo para el sistema $\mathbf{SA_2}$. Lo llamaremos $\mathbf{M_2.V}$.

**I.1.15. PROPOSICION.** Considere las siguientes listas:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 9 | 10 |
| 2 | 6 | 5 | 6 | 7 | 8 | 5 | 6 | 7 | 8 | 5 | 6 | 7 | 8 | 5 | 6 | 7 | 8 | 11 | 12 |
| 3 | 7 | 9 | 10 | 11 | 12 | 10 | 11 | 12 | 9 | 11 | 15 | 9 | 13 | 14 | 9 | 13 | 10 | 14 | 13 |
| 4 | 8 | 13 | 14 | 15 | 16 | 16 | 13 | 14 | 15 | 12 | 16 | 10 | 14 | 15 | 12 | 16 | 11 | 16 | 15 |

Entonces, si en el sistema $\mathbf{SA_2}$ se interpreta punto por cualquier entero entre 1 y 16, *recta* por columna y la relación *sobre* por pertenecer, se tiene un modelo para $\mathbf{SA_2}$. Lo llamaremos $\mathbf{M_2.VI}$.

Podríamos dar otro tipo de modelos, como por ejemplo, considerar ternas de países ó cuaternas de colores, donde los *puntos* serían países y las *rectas*, las ternas o cuaternas. Dejamos al lector, construir dichos modelos.

Ahora bien en los modelos **$M_3$.III** y **$M_2$.IV**, a diferencia de los otros, se interpretaron los términos primitivos, de **$SA_3$** y **$SA_2$** respectivamente, por términos técnicos (primitivos o no, poco importa) de otros sistemas axiomáticos. En el caso de **$M_3$.III**, términos de la Geometría Euclidiana Ordinaria y en el caso de **$M_2$.IV** de la geometría esférica.

Esta diferencia tan marcada entre los modelos, justifica las siguientes definiciones.

**I.1.16. DEFINICION.** Se dice que un modelo de un Sistema Axiomático es *Concreto* si los significados asignados a los términos primitivos son objetos y relaciones adaptados o tomados del mundo *real*.

**I.1.17. DEFINICION.** Un modelo para un sistema axiomático, $\mathcal{A}$, el cual interpreta los términos primitivos del sistema por términos y relaciones técnicas de otro sistema axiomático, $\mathcal{B}$, se dice que es un modelo *Abstracto* (en el sistema $\mathcal{B}$).

Para finalizar, diremos que los modelos más comunes son los abstractos, ya que si un sistema axiomático tiene (o mas bien, se prueba que hay) un número infinito de términos primitivos, lo cual es lo más frecuente, no tenemos en la *naturaleza* tantos elementos como para asignarles a cada uno.

## I. 1. EJERCICIOS.

**I.1.1.** Haga ver que un enunciado de un sistema axiomático es verdadero, en un modelo, si y solo si su negación es falsa, en dicho modelo.

**I.1.2.** Demuestre los teoremas de las proposiciones **I.1.6** y **I.1.8.**

**I.1.3.** Pruebe que en el sistema **$SA_2$** son teoremas:

**i)** Si una recta ***l*** contiene exactamente *n* puntos, entonces cualquier recta paralela a ***l*** contiene exactamente n puntos.
**j)** Si cualquier recta, ***l***, contiene *n* puntos, entonces hay exactamente *n-1* paralelas a ***l***.
**k)** Si una recta contiene exactamente *n* puntos, entonces cualquier recta contiene exactamente *n* puntos.

**I.1.4.** Demuestre que en el Sistema **$SA_3$** es un teorema:

**i')** Si existe una recta con exactamente *n* puntos, entonces cualquier recta contiene exactamente *n* puntos, y cualquier punto tiene exactamente *n* rectas que pasan a través de él.

**I.1.5.** Al sistema **$SA_2$** al agregarle el postulado:

**$P_6$** : Si ***l*** es una recta, entonces existen a lo más tres puntos sobre ***l***.

Se obtiene un nuevo sistema, llamado el *Sistema de Young*. Pruebe que en este sistema los siguientes enunciados son teoremas:

**Y.1.** Existen exactamente 9 puntos y 12 rectas.
**Y.2.** Existen exactamente cuatro rectas por cualquier punto.

**I.1.6.** El Sistema Axiomático obtenido al agregarle el mismo postulado $\mathbf{P_6}$ del ejercicio anterior, al sistema $\mathbf{SA_3}$ se llama el *Sistema de Fano*. Demuestre que en el sistema de Fano son teoremas:

**F.1.** Existen exactamente 7 puntos y 7 rectas.
**F.2.** Existen exactamente 3 rectas por cualquier punto.

**I. 1.7.** Construya modelos para los sistemas de Young y Fano. ¿Qué puede decir acerca de *todos* los modelos de estos sistemas?

**I.1.8.** Considérese un conjunto $\mathcal{K}$ de elementos indefinidos, que representaremos con minúsculas, y designemos por *R*, una relación binaria indefinida (es decir, una relación que conecta a dos elementos de $\mathcal{K}$) que puede o no verificarse entre un par de elementos de $\mathcal{K}$. Si el elemento *a* de $\mathcal{K}$ se relaciona con el *b* de $\mathcal{K}$ por la relación R, escribiremos *aRb*. Ahora admitamos los cuatro siguientes postulados referentes a los elementos de $\mathcal{K}$ y a la relación binaria *R*.

$\mathbf{P_1}$ : Si *a* y *b* son elementos distintos de $\mathcal{K}$, entonces *aRb* ó bien *bRa*.
$\mathbf{P_2}$ **:** Si *a* y *b* son elementos cualesquiera de $\mathcal{K}$ tales que *aRb*, entonces *a* es distinto de *b*.
$\mathbf{P_3}$ **:** Si *a, b, c* son tres elementos cualesquiera de $\mathcal{K}$ tales que *aRb* y *bRc*, entonces *aRc*.
$\mathbf{P_4}$ **:** $\mathcal{K}$ consiste de 4 elementos distintos.

Dedúzcanse los seis siguientes teoremas de los cuatro postulados anteriores.

$\mathbf{T_1}$ **:** Si *aRb*, entonces no tenemos que *bRa*.
$\mathbf{T_2}$ **:** Si *aRb*, entonces no hay un *c* tal que *cRa* y *bRc*.
$\mathbf{T_3}$ **:** Hay exactamente un elemento de $\mathcal{K}$ que no está relacionado, bajo *R*, con ningún elemento de $\mathcal{K}$.

**Definición1 :** Si *bRa*, decimos que *aDb*.

$\mathbf{T_4}$**:** Si *aDb* y *bDc*, entonces *aDc*.

**Definición2 :** Si *aRb* y no hay ningún elemento *c* tal que también *aRc* y *cRb*, entonces decimos que *aFb*.

$\mathbf{T_5}$ **:** Si *aFc* y *bFc*, entonces *a* y *b* son idénticos.
$\mathbf{T_6}$ **:** Si *aFb* y *bFc*, entonces no tenemos que *aFc*.

**I.1.9.** Si una proposición es verdadera en un modelo de un sistema axiomático ¿Su correspondiente función proposicional, en el sistema dado, es deducible (es decir, es un teorema) de los postulados?

## *I.2. CONSISTENCIA.*

En esta sección trabajaremos con la propiedad más importante que deben de cumplir, o mejor dicho, que deseamos que cumplieran, los sistemas axiomáticos.

Si el propósito del lenguaje es comunicarse, es auto-derrotarse si algo es dicho y al mismo tiempo se retracta de ello. Para ejemplificar, si **Q** fuera una proposición y afirmáramos que "**Q** y no-**Q**", en realidad no estamos diciendo nada, o dicho de otra forma, estamos rompiendo las leyes del lenguaje y hablamos sin sentido.

Algo similar le pediremos a los Sistemas Axiomáticos. Como en estos no tenemos proposiciones sino formas proposicionales, y por tanto no hay falsedades o verdades, entonces una propiedad equivalente, que podría pedírseles, sería que dos funciones proposicionales cualesquiera no fueran de la forma "**σ**" y "no-**σ**". A esta propiedad le daremos un nombre especial.

**I.2.1. DEFINICION.** Un Sistema Axiomático, o un conjunto de Postulados de un sistema, se dice que es *Inconsistente* si y solo si no existen dentro del sistema dos axiomas o un teorema y un axioma ó dos teoremas que se contradigan, es decir, que sean de la forma "**σ**" y "no-**σ**". En el otro caso diremos que es *Consistente*.

Una definición equivalente, debida al punto **(F)** del patrón de sistemas axiomático, es que dos enunciados contradictorios, no puedan ser deducidos lógicamente de los postulados.

Lo que hay que recalcar es que *es absolutamente necesario para un Sistema Axiomático el ser consistente*, sin ésta propiedad el sistema no tiene sentido, y, por ende, sería innecesario considerar cualquier otra propiedad.

Surge inmediatamente la pregunta ¿Cómo podemos saber que un Sistema Axiomático es o no consistente? De la definición deducimos que tendríamos que probar que es imposible que un teorema o un axioma, contradiga a otro teorema o a un axioma.

Si de alguna forma supiéramos que de un conjunto de postulados hemos deducido todos los teoremas, podríamos verificar a pie la no-contrariedad, pero a pesar de esto, podría ocurrir que la lista fuera tan grande o que los teoremas fueran tan complejos y sutiles, que una contradicción, podría permanecer entre ellos. Por otro lado ¿Cómo probaríamos o cómo sabríamos que todos los teoremas están en la lista?

En la mayoría de los Sistemas, al menos los de mayor interés, el conjunto de teoremas no está completamente determinado y de aquí que no exista garantía alguna de que si hasta cierto momento no se ha encontrado una contradicción, más adelante no la hallemos.

Atacar el problema en forma directa no es, pues, cosa fácil. Existen métodos indirectos para probar la consistencia de un Sistema Axiomático. El método de más éxito hasta ahora inventado es el de modelos.

¿Podría existir un Sistema Axiomático que tuviera un modelo y ser al mismo tiempo inconsistente? La respuesta es **NO**. Ya que si un sistema fuera inconsistente existirán dos enunciados contradictorios, digamos "**σ**" y "no-**σ**", los cuales serían satisfechos por el modelo (Proposición **I.1.4**), es decir. serían los dos al mismo tiempo verdaderos lo cual es imposible, con esto tenemos:

**I.2.2. PROPOSICION.** *(Criterio de Consistencia).* Si existe un modelo para un sistema axiomático, entonces el sistema es consistente.

**I.2.3. NOTA.** El recíproco de la proposición anterior, es decir: Si un sistema axiomático es consistente, entonces tiene un modelo, también es cierto. Nosotros lo tomaremos como un hecho, pero no lo probaremos.

Los modelos $\mathbf{M_3.I}$, $\mathbf{M_3.II}$ y $\mathbf{M_3.III}$, dados en la sección anterior, son pruebas de que el sistema $\mathbf{SA_3}$ es consistente. En forma análoga, los modelos $\mathbf{M_2.IV}$, $\mathbf{M_2.V}$ y $\mathbf{M_2.VI}$ muestran la consistencia de $\mathbf{SA_2}$. Y por supuesto $\mathbf{SA_1}$ es consistente, ya que cualquiera de los modelos dados para $\mathbf{SA_2}$ y $\mathbf{SA_3}$ también lo son para $\mathbf{SA_1}$.

Recordemos que existen dos tipos de modelos, los concretos y los abstractos. ¿Qué nos tienen que decir cada uno de ellos respecto a la consistencia?

Cuando se ha presentado un modelo concreto sentimos que hemos establecido una consistencia absoluta de nuestro sistema axiomático, pues si se implicaran teoremas contradictorios, entonces proposiciones contradictorias correspondientes se verificarían en nuestro modelo concreto (en el mundo).

No siempre es posible establecer un modelo concreto de un Sistema Axiomático. Por ejemplo, si se tiene un teorema, en el sistema, que garantiza la existencia de un número infinito de elementos primitivos, ciertamente sería imposible que tuviera un modelo concreto; pues el mundo real no contiene un número infinito de objetos. En dichos casos intentaremos establecer un modelo abstracto, asignando a los términos primitivos del sistema axiomático, digamos $\mathcal{A}$, términos de algún otro sistema axiomático, digamos $\mathcal{B}$, de tal manera que las interpretaciones de los postulados de $\mathcal{A}$, sean consecuencias 1ógicas, es decir, teoremas, de los del sistema $\mathcal{B}$. Pero ahora nuestra prueba de consistencia del sistema $\mathcal{A}$ ya no puede reclamarse que sea una prueba absoluta, sino tan solo una prueba relativa. Todo lo que podemos decir es que el sistema $\mathcal{A}$ es consistente si el sistema $\mathcal{B}$ lo es, y hemos reducido la consistencia de un sistema a la de otro sistema.

Concretando esto y teniendo en cuenta la proposición anterior, tenemos:

**I.2.4. DEFINICION.** Un Sistema Axiomático se dirá que es *Absolutamente Consistente*, o que su *Consistencia es Absoluta*, si existe un modelo concreto de tal sistema.

**I.2.5. DEFINICION.** Si un Sistema Axiomático tiene un modelo abstracto diremos que el sistema tiene una *Consistencia Relativa*, o dicho de forma precisa, si un sistema axiomático

$\mathcal{A}$, tiene un modelo abstracto en un sistema $\mathcal{B}$, entonces la Consistencia del sistema $\mathcal{A}$ es *Relativa a la Consistencia de* $\mathcal{B}$.

La consistencia relativa es lo mejor que podemos esperar cuando apliquemos el método de modelos a las ramas de las matemáticas, pues muchas de estas ramas, contienen un número infinito de elementos primitivos.

Para finalizar solo diremos que los modelos **M$_3$.III** y **M$_2$.IV** prueban consistencias relativas para los sistemas axiomáticos **SA$_3$** y **SA$_2$** respectivamente, y los modelos **M$_3$.I**, **M$_3$.II**, **M$_2$.V** y **M$_2$.VI** consistencias absolutas para los mismos.

## I.2. EJERCICIOS.

**I.2.1.** Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de postulados de un sistema axiomático $\mathcal{L}$. Conteste:

**a)** Si $\sigma$ es un enunciado de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{P}$ es inconsistente, ¿$\mathcal{P}\cup\{\sigma\}$ seguirá siendo inconsistente?

**b)** Si $\sigma$ es un enunciado de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{P}$ no tiene modelos, ¿Tendrá modelos $\mathcal{P}\cup\{\sigma\}$?

**c)** Si **P** es un postulado de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}$ no tiene modelos, ¿Tendrá un modelo $\mathcal{P}-\{P\}$?

**d)** Si **P** es un postulado de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}$ es inconsistente, ¿Será inconsistente $\mathcal{P}-\{P\}$?

**I.2.2.** Pruebe que los sistemas de Young y Fano (ver ejercicio **I.1.5** y **I.1.6**) son absolutamente consistentes.

**I.2.3.** Pruebe que la Geometría Euclidiana Plana (ordinaria) es relativamente consistente al plano cartesiano ($\Re\times\Re$). (Para ver una axiomatización de ésta, vea el capítulo **II**) ¿Podría darse una prueba absoluta de consistencia para la geometría euclidiana plana?

**I.2.4.** Establézcase la consistencia absoluta del conjunto de postulados del ejercicio **I.1.8** por medio de cada uno de los siguientes modelos:

**a)** Supóngase que $\mathcal{K}$ consistente de un hombre, su padre, el padre de su padre y el padre del padre de su padre, e interpretemos *aRb* por: *a* es un antecesor de *b*.

**b)** Supóngase que $\mathcal{K}$ consistente de cuatro puntos distintos en una recta horizontal e interpretemos *aRb* por: *a* está a la izquierda de *b*.

**c)** Supóngase que $\mathcal{K}$ consiste de los cuatro enteros 1, 2, 3, 4 e interpretemos *aRb* por: $a < b$.

Tradúzcanse los enunciados de los teoremas y definiciones del sistema a las interpretaciones anteriores.

**I.2.5.** Si **P**, **Q**, y **R** son tres proposiciones, demuéstrese que el siguiente conjunto de cuatro enunciados es inconsistente:

**a)** Si **P** es verdadero, entonces **R** es falso.

**b)** Si **P** es falso, entonces **P** es verdadero.

**c)** **R** es verdadero.

**d)** **P** es falso.

**I.2.6.** El siguiente sistema axiomático se conoce con el nombre de *Geometría Proyectiva Plana:*

Términos Primitivos: Punto, Recta, Sobre.

Los postulados:

**I) :** Existe una y solo una recta sobre cada dos puntos distintos, y, uno y solo un punto sobre cada dos rectas distintas.

**II) :** Existen dos puntos y dos rectas tales que cada uno de los puntos está solo sobre una de las rectas y cada una de las rectas está solo sobre uno de los puntos.

**III) :** Existen dos puntos y dos rectas, no estando los puntos sobre las rectas, tales que el punto sobre las dos rectas **I)** está sobre la recta que pasa sobre los dos puntos.

Demuestre que la geometría proyectiva plana es absolutamente consistente.

## *I.3. INDEPENDENCIA.*

Después de que se ha probado la consistencia de un sistema axiomático, la siguiente pregunta que aparece es ¿Los postulados escogidos son en realidad primitivos? es decir, que ¿No se podrán derivar algunos postulados a partir de los restantes? Dicho de otra forma ¿Cómo sabemos que un postulado en realidad no es un teorema? Inmediatamente surge otra pregunta ¿Qué le ocurriría al sistema si en efecto un postulado fuera un teorema?

Si esto ocurriera el problema no es grave, lo peor que puede ocurrir es que no encontremos la prueba de tal *postulado* y lo que podemos hacer es dejarlo en la lista de postulados. En caso contrario, es decir que encontráramos una demostración, bastaría quitarlo de la lista.

Formalicemos esta propiedad.

**I.3.1. DEFINICION.** Un postulado de un conjunto de postulados se dice que es *Independiente* si **no** es consecuencia lógica de los otros postulados del conjunto.

**I.3.2. DEFINICION.** Un conjunto de postulados se dice que es *Independiente* si y solo si cada uno de sus postulados es independiente.

La consideración más famosa en la historia de las matemáticas, acerca de la independencia de un postulado, es la relacionada con el estudio del postulado de las paralelas de Euclides. Durante siglos, los matemáticos tuvieron dificultad para considerar el postulado de las paralelas como independiente de los demás postulados (y axiomas) de Euclides, y por ello hicieron intentos repetidos para demostrar que era consecuencia de estas otras suposiciones. Fue la aparición de la geometría hiperbó1ica (o lobachevsquiana) y la prueba final de la consistencia relativa de ella, lo que finalmente estableció la independencia del postulado de las paralelas de Euclides.

De la definición no sacamos cómo podemos probar la independencia de un postulado. Al igual que la consistencia, existen pruebas indirectas, por medio de modelos, para verificar la independencia de un postulado.

**I.3.3. PROPOSICION** (*Criterio de Independencia*). Si un sistema axiomático tiene como postulados al conjunto $\mathcal{P}$ y **P** es un enunciado de $\mathcal{P}$ tal que existe un modelo para el conjunto $\mathcal{P}$**'**, que se obtiene de $\mathcal{P}$ al sustituir a **P** por su negación, no-**P**, entonces **P** es independiente del resto de postulados.

**DEMOSTRACION.** Esta se hará haciendo ver que si **P** fuera dependiente de **P**, entonces no existiría un modelo para el conjunto de postulados $\mathcal{P}$**'** = ($\mathcal{P}$ -{**P**}) $\cup$ {no-**P**}.
Supongamos, pues, que **P** es dependiente, esto quiere decir que **P** es deducible (es decir que **P** es un teorema) a partir del conjunto de postulados ($\mathcal{P}$ -{**P**}).
Por otro lado, el conjunto $\mathcal{P}$ -{**P**} puede o no tener modelos (dependiendo de que sea consistente o no, ver nota **I.2.3**). En caso de que no los tuviera, es obvio que tampoco los tendría el conjunto ($\mathcal{P}$ -{**P**}) $\cup$ {no-**P**}.
Si $\mathcal{P}$ -{**P**} tiene un modelo, entonces cualquiera de estos debe satisfacer a **P**, debido a nuestra suposición y a la **I.1.4**; pero la definición de modelo impide que estos satisfagan a no-**P**.
En ambos casos el conjunto de postulados (**P**-{**p**}) $\cup$ {no-**p**} no puede tener modelos.

Como hicimos ver en la sección anterior, la consistencia de los sistemas axiomáticos es fundamental; entonces nuestro criterio de independencia puede partir de la hipótesis adicional de que el conjunto de postulados $\mathcal{P}$ deba ser consistente. Con esto, podemos modificar la redacción de la proposición:

Si los sistemas axiomáticos cuyos postulados son $\mathcal{P}$ y ($\mathcal{P}$ -{**P**}) $\cup$ {no-**P**} (**P** un enunciado de $\mathcal{P}$) son consistentes, entonces el enunciado **P** es independiente del conjunto de postulados $\mathcal{P}$ -{**P**}.

Como ilustración, mostraremos que los postulados del sistema axiomático $\mathbf{SA}_2$ son independientes.

Si queremos mostrar la independencia del postulado $\mathbf{P}_1$, basta dar un modelo que satisfaga a los postulados $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_{4a}$, $\mathbf{P}_{4b}$, $\mathbf{P}_{5a}$, $\mathbf{P}_{5b}$ junto con la negación de $\mathbf{P}_1$ (no-$\mathbf{P}_1$).

El postulado, $\mathbf{P}_1$, dice que: existe al menos una recta; su negación, no-$\mathbf{P}_1$, es que: no existen rectas. Si queremos dar un modelo, tenemos que interpretar los términos primitivos; la interpretación que debemos dar es obvia, debe de constar de un solo objeto (la interpretación de punto) ya que si tuviera al menos dos, el postulado $\mathbf{P}_{4a}$ nos obligaría a que el modelo tuviera al menos una *recta* (ya que tendría que pasar por dichos puntos). Entonces nuestra interpretación será: un objeto cualquiera, para punto y no hay interpretación, es decir es el conjunto vacío, para *recta*. El que se cumplan el resto de los postulados se debe a que éstos hablan sobre rectas y pares de puntos y como no hay tales, entonces son verdaderos por vacuidad[6]. Por lo tanto la interpretación resulta ser un modelo y, recalcando, satisface el postulado no- $\mathbf{P_1}$, con lo que resulta que $\mathbf{P_1}$ es independiente.

Pasemos con el postulado $\mathbf{P_2}$. Este dice: Si $\boldsymbol{l}$ es una recta, entonces existen al menos tres puntos sobre $\boldsymbol{l}$; su negación: Existen rectas con a lo más dos puntos.

Considérese la siguiente interpretación. Por un *punto* entenderemos cualquiera de los números 1, 2, 3, 4, y por *recta* los siguientes conjuntos:

$$\{1,2\}, \{3,4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{2,3\} \text{ y } \{1,3\}$$

y por la relación *sobre*, el ser elemento.

Es claro que esta interpretación satisface la negación del postulado $\mathbf{P_2}$. Dejemos al lector que pruebe que es en verdad un modelo (ver Ejercicio **1.3.4**). Con esto tenemos la independencia del postulado $\mathbf{P_2}$.

El postulado $\mathbf{P_3}$ dice: si $\boldsymbol{l}$ es una recta entonces existe un punto que no esta sobre ella; su negación: no existen puntos por fuera de una recta.

La interpretación que debemos de dar es clara, solamente debe tener una *recta* la cual, debido a $\mathbf{P_2}$, contenga al menos tres *puntos*. Entonces, por punto entenderemos a cualquiera de los números: 1, 2, 3; por *recta*, al conjunto: {1, 2, 3}; la relación *sobre* es: el ser elemento.

Que se cumplan los postulados $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_{4a}}$ y $\mathbf{P_{4b}}$ es obvio. La satisfacibilidad de $\mathbf{P_{5a}}$ y $\mathbf{P_{5b}}$ se debe a la vacuidad del *punto* exterior a la recta. Con esto, la interpretación es un modelo y $\mathbf{P_3}$ resulta independiente.

Veamos el postulado $\mathbf{P_{4a}}$, éste dice: Si $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ son dos puntos cualesquiera, entonces existe al menos una recta que pasa por $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$. Su negación: existen puntos $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ para los cuales no hay una recta que pase por ellos.

Considérese los siguientes conjuntos:

$$\{\mathbf{R_1}, \boldsymbol{R_2}, \boldsymbol{R_3}\} \text{ y } \{\boldsymbol{R_4}, \boldsymbol{R_5}, \boldsymbol{R_6}\}$$

La interpretación es la natural, los dos conjuntos son *rectas* y los seis elementos son los *puntos*.

Esta interpretación satisface no-$\mathbf{P_{4a}}$ ya que existen puntos, por ejemplo $\boldsymbol{R_1}$ y $\boldsymbol{R_4}$, que no tienen una recta que los contenga. Dejamos al lector verificar que esta interpretación es un modelo, es decir que también satisface los postulados $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$, $\mathbf{P_{4b}}$, $\mathbf{P_{5a}}$ y $\mathbf{P_{5b}}$ (Ver Ejercicio **1.3.4.**). De aquí que $\mathbf{P_{4a}}$ sea independiente.

[6] Otra forma de decir lo mismo es que como los postulados son de la forma “Si **P**, entonces **Q**” y **P** es falso (no existen rectas y pares de puntos) entonces es, efectivamente, “Si **P**, entonces **Q**” verdadero.

La negación del postulado $\mathbf{P}_{4b}$ dice: Existen puntos ***P*** y ***Q*** para los cuales existen al menos dos rectas que pasan por ellos.

Un modelo que satisface los postulados $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_{4a}$, $\mathbf{P}_{5a}$ y $\mathbf{P}_{5b}$ y no- $\mathbf{P}_{4b}$ es: *punto* cualquiera de los números 1, 2, 3,4, 5, 6; *recta* cualquiera de las columnas:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 |
| 2 | 5 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 2 | 3 | 5 | 5 | 3 | 3 | 4 | 5 | 2 |
| 3 | 6 | 5 | 6 | 5 | 6 | 6 | 5 | 5 | 6 | 4 | 6 | 6 | 4 | 5 | 6 | 6 | 4 |

y *sobre* por pertenecer a la columna.

Para probar que el postulado $\mathbf{P}_{5a}$ es independiente, basta tomar cualquiera de los modelos que dimos para el sistema axiomático $\mathbf{S}_{A3}$, es decir $\mathbf{M}_3$**.I**, $\mathbf{M}_3$**.II** o $\mathbf{M}_3$**.III**, ya que el postulado $\mathbf{P}_{5'}$ de $\mathbf{SA}_3$ es precisamente la negación de $\mathbf{P}_{5a}$.

Finalmente para probar la independencia del postulado $\mathbf{P}_{5b}$, consideremos el complicado modelo:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| 2 | 6 | 19 | 5 | 16 | 7 | 8 | 12 | 5 | 6 | 7 | 8 | 11 | 5 | 6 |
| 3 | 7 | 15 | 9 | 6 | 19 | 10 | 15 | 16 | 10 | 12 | 9 | 13 | 12 | 19 |
| 4 | 8 | 10 | 13 | 11 | 14 | 18 | 17 | 18 | 14 | | 15 | 19 | 14 | 9 |
| | | | | | | | | | 17 | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 13 | 17 |
| 7 | 8 | 10 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 12 | 9 | 11 | 10 | 14 | 18 |
| 11 | 17 | 16 | 11 | 15 | 10 | 12 | 1 | 18 | 16 | 14 | 11 | 15 | 19 |
| 15 | 13 | | 17 | | 13 | 16 | 14 | 13 | 17 | | 12 | 16 | |
| 18 | | | | | | 19 | | | | | | | |

Vemos que este modelo consta de 19 *puntos* y de 29 *rectas* donde no todas las *rectas* tienen el mismo número de *puntos*.

Solo para recalcar, veamos que se cumple la negación del postulado $\mathbf{P}_{5b}$, es decir, que se cumple que: Si ***l*** es una recta y ***P*** un punto fuera de ella, entonces existen al menos dos rectas que pasan por ***P*** y que no cortan a ***l***. Por ejemplo; si ***l*** fuera la primera columna, por el *punto* 5 pasan dos paralelas a ***l*** (las segunda y tercera columnas).

## I.3.EJERCICIOS.

**I.3.1.** Sea **P** un postulado independiente de los postulados de un sistema axiomático. Demuestre que su negación, no-**P**, no necesariamente es independiente. ¿Bajo qué condiciones si lo es?

**I.3.2.** Si a un conjunto de postulados le aumentamos un enunciado independiente ¿El sistema seguirá siendo consistente?

**I.3.3.** Sea **P** un postulado dependiente de los postulados $\mathcal{P}$ de un sistema. Demuestre que una interpretación es un modelo para $\mathcal{P}$ si y solo si también es un modelo para $\mathcal{P}$ -{**P**}.

**I.3.4.** Formalice rigurosamente la independencia de los postulados de los sistemas axiomáticos $\mathbf{SA_1}$, $\mathbf{SA_2}$ y $\mathbf{SA_3}$.

**I.3.5.** Establézcase la independencia del conjunto de postulados del ejercicio **I.1.8** por medio de las siguientes interpretaciones:

**a)** Sea $\mathcal{K}$ consistente con dos hermanos, su padre y el padre de su padre, e indiquemos por *aRb* que "*a* es un antecesor de *b*".
**b)** Sea $\mathcal{K}$ consistente con los cuatro enteros 1, 2, 3, 4 e indiquemos por *aRb* que "$a < b$".
**c)** Sea $\mathcal{K}$ consistente con los cuatro enteros 1, 2, 3, 4 e indiquemos por *aRb* que "$a \neq b$".
**d)** Sea $\mathcal{K}$ consistente con los cinco enteros 1, 2, 3, 4, 5 e indiquemos *aRb* Por "$a < b$".

**I.3.6**. Demuestre que los postulados de la geometría proyectiva plana (ver ejercicio **I.2.6**) son dependientes.

**I.3.7.** Una estructura algebraica se dice que es un *Sistema de Peano*, si es modelo del siguiente sistema axiomático:

Términos primitivos:
a) Un conjunto $K$ de elementos no definidos.
b) Una función $S : K \to K$ , no definida.

Postulados:
$\mathbf{P_1}$ : Si $S(x) = S(y)$ entonces $x = y$.
$\mathbf{P_2}$ : Existe un elemento $z$ tal que $z \neq S(x)$ para cualquier $x$.

$\mathbf{P_3}$ : Si $A$ es un subconjunto de $K$ con las propiedades:
a) $z \in A$ ($z$ el elemento de $\mathbf{P_2}$ ).
b) Si para cualquier $x \in A$ se tiene que $S(x) \in A$, entonces $S = K$.

Demuestre que este sistema es consistente relativamente y que sus postulados son independientes.

**I.3.8.** Demuestre que los postulados de los sistemas de Young y Fano son independientes.

**I.3.9.** Decimos que dos conjuntos de postulados $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son equivalentes si cada sistema implica al otro, es decir, si los términos primitivos de cada sistema son definibles a través de los términos primitivos del otro, y si cada postulado de uno es deducible a partir de los postulados del otro.

**i)** Muestre que en el ejercicio **I.1.8**; los enunciados $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{P_3}$ y $\mathbf{P_4}$ constituyen un conjunto de postulados equivalentes a los enunciados $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$ y $\mathbf{P_4}$.

**ii)** ¿Qué puede decir respecto a consistencia e independencia entre dos conjuntos de postulados equivalentes?

## *1.4. COMPLETEZ.*

La propiedad de completez para los sistemas axiomáticos es mas rebuscada que las dos propiedades antes descritas, por lo cual antes de dar una definición rigurosa, daremos una motivación.

Supongamos que queremos axiomatizar (es decir, dar una estructura de Sistema Axiomático) a un conjunto de propiedades de alguna rama de las matemáticas, por ejemplo la geometría euclidiana plana.

Lo primero que tenemos que hacer es seleccionar los términos primitivos. Estos deben de constituir una colección de términos técnicos, de esta rama, tal que cualquier otro término técnico sea definible a partir de ellos. La siguiente cosa que debemos hacer es formular una lista creciente de enunciados mutuamente consistente acerca de los términos primitivos. Estos serán nuestros postulados. Surge un problema. ¿Cuándo debemos cortar la lista creciente de postulados?

Lo que queremos es que nuestro conjunto de postulados sea lo suficientemente amplio como para implicar la verdad o la falsedad de cualquier enunciado posible (por supuesto que se encuentre dentro del discurso). En otras palabras queremos un número suficiente de postulados tal que si $\boldsymbol{\sigma}$ es un enunciado, escrito en los términos y relaciones técnicas del sistema, entonces $\boldsymbol{\sigma}$ o su negación, no-$\boldsymbol{\sigma}$, sea deducido a partir de los postulados.

Si un conjunto de postulados no es suficientemente amplio, existe, pues, un enunciado y su negación los cuales no son demostrables.

Así, por ejemplo, en el sistema $\mathbf{SA_1}$, de su conjunto de postulados no es posible deducir el enunciado: Existen a lo más siete puntos, ni tampoco su negación: Existen al menos ocho puntos.

Otro ejemplo nos lo da la geometría absoluta plana[7], en ésta no podemos decidir si la suma de los ángulos interiores de un triángulo o es menor o es igual a dos ángulos rectos.

Esta insuficiencia de un conjunto de postulados es lo que llamaremos incompletud. Formalmente,

**1.4.1. DEFINICION.** Sea $\mathcal{P}$ un conjunto de postulados, consistente, de un sistema axiomático. Se dice que $\mathcal{P}$ es *Incompleto* si es posible encontrar un enunciado, $\boldsymbol{\sigma}$, y su negación, no- $\boldsymbol{\sigma}$

---

[7] La geometría absoluta plana es la que tiene como únicos postulados los grupos **I** a **IV** de Hilbert, Vg. le falta el postulado **V**, el de las paralelas para ser la geometría euclidiana plana. Ver capítulo **III**.

(escritos en el vocabulario técnico del sistema), los cuales no sean ambos demostrables a partir de $\mathcal{P}$. En caso contrario diremos que $\mathcal{P}$ es *Completo*.

La definición, al igual que en indepencia y consistencia, no es útil como criterio para saber cuando un conjunto de postulados es completo o incompleto. Para dar un criterio introduciremos el concepto de *categoricidad*, para lo cual detallaremos algunas cosas concernientes a las interpretaciones de los conjuntos de postulados.

Los términos primitivos de un conjunto de postulados $\mathcal{P}$, está dividido en tres grandes conjuntos, un conjunto de elementos, un conjunto de relaciones entre elementos, digamos $\{\mathbf{R_1}, \mathbf{R_2},...\}$ y un conjunto de operaciones entre elementos, digamos $\{\mathbf{O_1}, \mathbf{O_2},\ldots\}$.

Con esta idea en mente, una interpretación, $\boldsymbol{I}$, del conjunto $\mathcal{P}$, constará de un conjunto $\boldsymbol{A}$ (los significados asociados a los elementos), un conjunto de relaciones constantes $\{\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2},...\}$ (los significados asociados a las relaciones $\mathbf{R_1}, \mathbf{R_2},...$, respectivamente) y un conjunto de operaciones $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2},...\}$ (los significados asociados a las operaciones $\mathbf{O_1}, \mathbf{O_2},...$, respectivamente).

Simbolizando, tenemos que una interpretación, $\boldsymbol{I}$, de un conjunto, $\mathcal{P}$, de postulados, es una terna de conjuntos:

$$\boldsymbol{I} = \langle \boldsymbol{A}, \{\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2},...\}, \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2},...\}\rangle$$

donde, $\mathbf{r_i}$ es la interpretación de la relación primitiva $\mathbf{R_i}$ y $\mathbf{e_J}$ es la interpretación de la operación primitiva $\mathbf{O_J}$.

En todo esto estamos suponiendo que tanto las relaciones como las operaciones primitivas de $\mathcal{P}$, están nombradas en un orden. Así, si diéramos dos interpretaciones, $\boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{J}$, de un conjunto de postulados $\mathcal{P}$, donde:

$$\boldsymbol{I} = \langle \boldsymbol{A}, \{\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2},...\}, \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2},...\}\rangle \qquad , \qquad \boldsymbol{J} = \langle \boldsymbol{B}, \{\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2},...\}, \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2},...\}\rangle$$

entonces tanto $\mathbf{r_i}$ como $\mathbf{s_i}$ son las interpretaciones, respectivas, de la relación primitiva $\mathbf{R_i}$ de $\mathcal{P}$, en forma análoga $\mathbf{e_J}$ y $\mathbf{u_J}$ son los significados asociados, respectivamente, a la operación $\mathbf{O_J}$ de $\mathcal{P}$.

Para agilizar nuestro lenguaje introduciremos algunas notaciones.

Cuando los elementos $a_1, a_2,\ldots , a_n$ de $\boldsymbol{A}$ estén relacionados por medio de la relación $\mathbf{r}$, escribiremos:

$$(a_1, a_2,\ldots , a_n) \in \mathrm{r}$$

Cuando un elemento $a$ de $\boldsymbol{A}$ se obtiene de efectuar la operación $\mathbf{e}$ sobre los elementos $a_1, a_2,\ldots ,$ $a_n$ de $\boldsymbol{A}$ escribiremos:

$$\mathbf{e}(a_1, a_2,\ldots , a_n) = a$$

Pasemos a definir una propiedad entre interpretaciones de un conjunto de postulados.

**1.4.2. DEFINICION.** Sean $\boldsymbol{I} = \langle \boldsymbol{A}, \{\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2},...\}, \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2},...\}\rangle$ y $\boldsymbol{J} = \langle \boldsymbol{B}, \{\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2},...\}, \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2},...\}\rangle$ dos interpretaciones de un conjunto de postulados $\mathcal{P}$. Si $h$ es una función de $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$, $h : \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$, la cual cumple con:

**i)** $h$ es biyectiva.

**ii)** $h$ preserva relaciones de $\mathcal{P}$, es decir:

$$(a_1, a_2, \ldots , a_n) \in \boldsymbol{r_i} \text{ si y solo si } (h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)) \in \boldsymbol{s_i}$$

para toda $i$.

**iii)** $h$ preserva operaciones de $\mathcal{P}$, es decir:

$$\mathbf{e_j}(a_1, a_2, \ldots , a_n) = a \text{ si y solo si } \mathbf{u_j}(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n)) = h(a)$$

para toda $\mathbf{j}$.

Entonces diremos que h es un *Isomorfismo* entre $\boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{J}$.

**1.4.3. DEFINICION.** Dos interpretaciones $\boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{J}$, de un conjunto de postulados $\mathcal{P}$, se dice que son *Isomorfas* si y solo si existe un isomorfismo, $h$, entre $\boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{J}$.

De estas definiciones se sigue que si dos interpretaciones $\boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{J}$, de un conjunto de postulados $\mathcal{P}$, son isomorfas y que si **P** es una proposición en $\boldsymbol{I}$ y **Q** la correspondiente proposición en $\boldsymbol{J}$, bajo el isomorfismo, entonces **P** es verdadera (falsa) en $\boldsymbol{I}$ si y solo si **Q** es verdadera (falsa) en $\boldsymbol{J}$.

Dos interpretaciones isomorfas de un conjunto de postulados $\mathcal{P}$ son, excepto por diferencias superficiales en la terminología y en la notación, idénticas; difieren una de otra no más que el leer en francés o en español la tabla de multiplicar del 10.

Con esto ya podemos establecer la propiedad de categoricidad.

**1.4.4. DEFINICION.** Cada vez que un conjunto de postulados sea tal que cualquiera dos modelos sean isomorfos, el conjunto de postulados, y por tanto el sistema axiomático al que pertenece, se dirá que es *Categórico.*

Finalmente, podemos enunciar el criterio:

**1.4.5. PROPOSICION** *(Criterio de Completez).* Si un conjunto de postulados es categórico, entonces es completo.

**DEMOSTRACION.** Supongamos que $\mathcal{P}$ es un conjunto de postulados incompleto. De aquí que existe un enunciado $\boldsymbol{\sigma}$ y su negación no-$\boldsymbol{\sigma}$ que no son deducibles a partir de $\mathcal{P}$. Esto último nos dice que tanto $\boldsymbol{\sigma}$ como no- $\boldsymbol{\sigma}$ son enunciados independientes de $\mathcal{P}$, y por tanto existen dos modelos, digamos $\mathbf{M_1}$ y $\mathbf{M_2}$, de $\mathcal{P}$ tales que $\mathbf{M_1}$ satisface a $\boldsymbol{\sigma}$ y $\mathbf{M_2}$ satisface a no-$\boldsymbol{\sigma}$. Pero si $\mathbf{M_2}$ satisface a no-$\boldsymbol{\sigma}$ entonces $\mathbf{M_2}$ no satisface a $\boldsymbol{\sigma}$, es decir, $\mathbf{M_2}$ hace falsa a $\boldsymbol{\sigma}$. Resumiendo, tenemos dos modelos de $\mathcal{P}$, $\mathbf{M_1}$ y $\mathbf{M_2}$, tales que a es verdadero en uno y falso en otro, con esto tenemos que $\mathbf{M_1}$ y $\mathbf{M_2}$ no pueden ser isomorfos y por tanto $\mathcal{P}$ no puede ser categórico. De esto se desprende el resultado.

Para probar la incompletez de un conjunto de postulados, $\mathcal{P}$, basta mostrar dos modelos no-isomorfos de $\mathcal{P}$. Algunas veces lo que se hace para establecer la completez es probar que cualquier modelo del conjunto de postulados es isomorfo a un modelo dado.

Un ejemplo claro de un sistema incompleto nos lo da el sistema **$SA_2$**, ya que tiene dos modelos, **$M_2$.V** y **$M_2$.VI** con nueve y dieciséis elementos cada uno, por lo cual no se puede establecer una biyección y por tanto no son isomorfos.

Dejemos al lector mostrar que los sistemas de Young y Fano, definidos en los ejercicios **1.1.5** y **1.1.6**, son categóricos y por tanto completos (ver ejercicio **1.4.4**).

Una de las grandes ventajas de un sistema axiomático abstracto es que al probar un teorema en realidad se están probando muchos teoremas. Para toda interpretación que satisface el sistema, cualquier teorema probado para el sistema sin interpretación se convierte en verdadero en el sistema interpretado; de aquí que, a mayor variedad de modelos para un sistema, éste tendrá mayor rango de aplicaciones. Por otro lado, mientras *más* completo sea un sistema, el número de modelos esencialmente diferentes será menor y por tanto disminuirá el rango de aplicación. Si uno desea estudiar un sistema particular intensamente, la completez es útil.

## I. 4. EJERCICIOS.

**I.4.1.** Suponga que la siguiente tabla es modelo para el sistema **$SA_2$** y establezca una función biyectiva entre éste y el modelo **$M_2$.V**:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 4 | 5 | 7 | 4 | 5 | 6 | 7 | 6 |
| 3 | 5 | 7 | 9 | 6 | 8 | 9 | 9 | 7 | 8 | 8 | 9 |

**I.4.2.** ¿Si dos sistemas tienen el mismo número de elementos ellos son isomorfos?

**I.4.3.** Pruebe que los sistemas **$SA_1$**, **$SA_2$** y **$SA_3$** son incompletos.

**I.4.4.** Demuestre que los sistemas Young y Fano son categóricos y por tanto completos.

**I.4.5.** Considere el siguiente conjunto de postulados, en el cual abeja y colmena son los términos primitivos:

**$P_1$:** Cualquier colmena es una colección de abejas.
**$P_2$:** Cualesquiera dos distintas colmenas tienen una y solo una abeja en común.
**$P_3$:** Cualquier abeja pertenece a dos y solo dos colmenas.
**$P_4$:** Existen exactamente cuatro colmenas.

Pruebe que:

**a)** Hay exactamente seis abejas.
**b)** Hay exactamente tres abejas en cada colmena.

**c)** Para cada abeja hay exactamente otra abeja la cual no está en la misma colmena que ella.

**I.4.6.** Demuestre que el sistema del ejercicio anterior, tiene las propiedades:

**a)** El conjunto de postulados {$\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$, $\mathbf{P_4}$} es absolutamente consistente.
**b)** El conjunto de postulados {$\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$, $\mathbf{P_4}$} es independiente.
**c)** El conjunto de postulados {$\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$, $\mathbf{P_4}$} es categórico.

**I.4.7.** Demuestre que el sistema axiomático dado en el ejercicio **I.1.8** es categórico y por tanto completo.