Miscelánea Matemática 40 (2004) 1–27 SMM

Lo visual y lo deductivo en las matemáticas

Carlos Torres Alcaraz
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
cta@lya.fciencias.unam.mx

Introducción

En 1995 tuve la ocasión de publicar, en colaboración con Jaime Óscar Falcón, un ensayo cuyo tema central era la necesidad de la demostración en matemáticas[1]. A fin de evidenciar este hecho decidimos acudir a un hito conceptual en la historia de las matemáticas: al descubrimiento de la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Para ello, recorrimos el mismo camino que, al parecer, siguieron los pitagóricos hasta alcanzar el punto en que la evidencia visual no tuvo ningún poder, no pudo producir nada. El caso no se eligió al azar: se trata de la primera demostración matemática en el sentido pleno de la palabra. Paralelamente, exploramos el recurso a la evidencia sensible como fuente del conocimiento en matemáticas. Tras fijar límites a lo que se puede lograr por este camino, y asegurar con ello la necesidad de la demostración, el ensayo concluye con un análisis del lugar que ocupan los principios lógicos de no contradicción y del tercero excluido en la aceptación de la verdad de aquello que se demuestra. El propósito de este trabajo es extender, en una de sus direcciones, la tarea iniciada en aquella ocasión. En particular, busca valorar el papel de la evidencia sensible en la construcción del conocimiento matemático, examinar el carácter de las pruebas visuales y explorar los nexos, un tanto problemáticos, entre la tendencia visual y la tendencia deductiva en la matemática. Dada la relevancia de las ideas contenidas en el trabajo con Falcón, en la primera parte de este ensayo recapitulamos algunas de ellas.

[1] El título del ensayo es "To Show and to Prove" (Mostrar y demostrar). Véase (Falcón y Torres, 1995).

Pruebas visuales

En cierta ocasión Juan José Rivaud presentó el siguiente mosaico al referirse al origen de la demostración pitagórica del teorema de la suma de los ángulos de un triángulo. Una mirada atenta a la figura será suficiente para descubrir un interesante patrón geométrico:

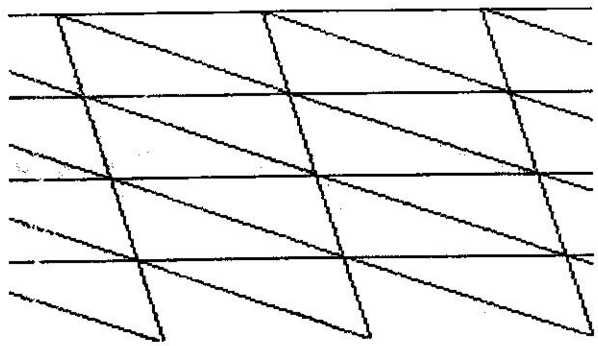


Figura 1.

El mosaico se compone de múltiples copias de un mismo triángulo. En cada vértice, cada ángulo del triángulo concurre dos veces, una como parte del triángulo de color y otra como parte del triángulo en blanco. Si denotamos los ángulos con letras, el teorema de la suma de los ángulos se hace aún más evidente:

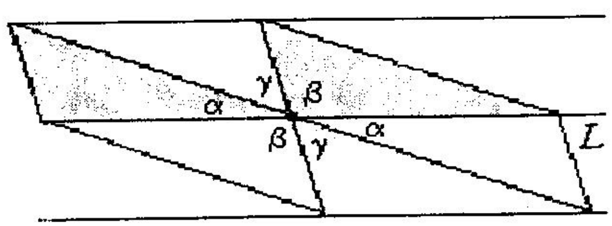


Figura 2.

Tenemos: $2(\alpha + \beta + \gamma) = 360°$. Por tanto, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Lo sorprendente, como lo advierte Rivaud, es que la demostración atribuida a los pitagóricos resulta de eliminar en la figura anterior algunos elementos innecesarios[2]:

[2]Véase (Heat, 1963, pp. 93-94). La idea es que la demostración tiene como base la observación directa de figuras, aunque en ella sólo se retiene lo esencial, quedando con ello oculto su origen. La demostración pitagórica pone un mayor énfasis en la argumentación lógica.

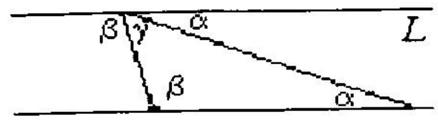


Figura 3.

Lo anterior proyecta alguna luz sobre la naturaleza del conocimiento matemático. Lo que tenemos en la Figura 1 no es en sí una configuración geométrica. Un mosaico es un mosaico, no una proposición ni la prueba de una proposición. Para convertir el mosaico (o lo que hay en él) en un objeto matemático se requiere de la participación activa del observador (o si se quiere, de la mente). Es él quien lo convierte en una configuración geométrica; es él quien advierte las relaciones existentes entre los distintos elementos de la configuración; es él quien aplica las nociones de *punto, línea, ángulo, triángulo, paralelismo*, etc. a lo que le es dado en la intuición. La prueba visual reclama además ciertos experimentos mentales, como los requeridos en nuestro ejemplo para confirmar que se trata de múltiples copias de un mismo triángulo. Es entonces que la figura adquiere el carácter de una proposición.

Es indiscutible que la evidencia intuitiva no es una recepción pasiva de datos. Es más bien una elaboración mental, un modo activo de mirar hacia las figuras. Es un hecho que los atributos aprehendidos a través de la evidencia intuitiva los consideramos como residentes en el objeto. Por ejemplo, un enunciado aritmético como $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$ señala una relación entre objetos, en este caso configuraciones espaciales de puntos, como a continuación se muestra:

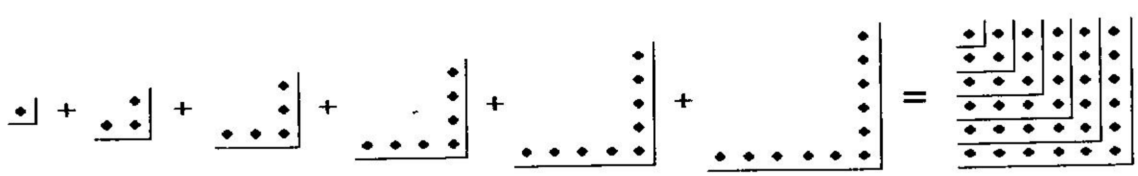
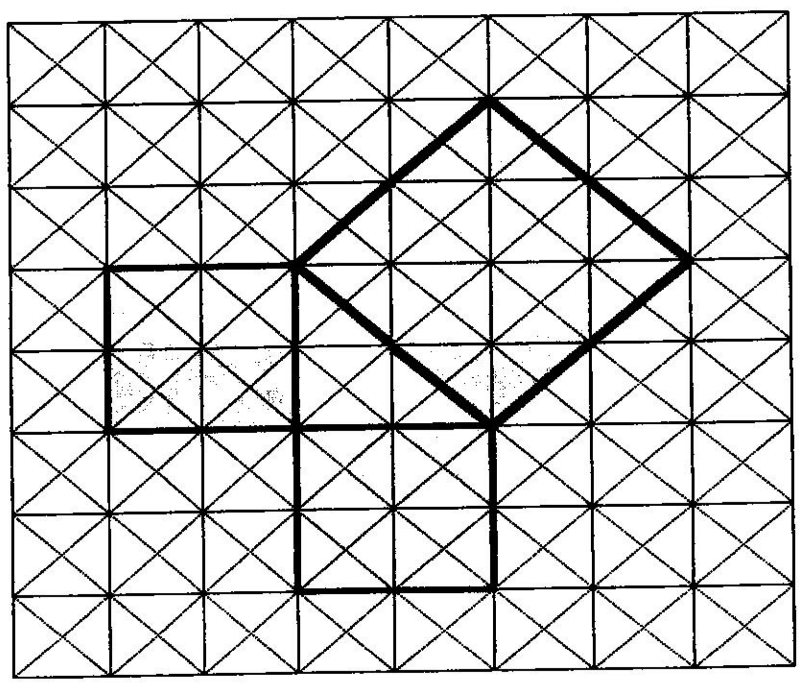


Figura 4.

En este caso tenemos un juego que conducimos mediante experimentos mentales con ciertas configuraciones. En él, la naturaleza específica de los arreglos no importa mucho; lo principal son los patrones que podemos formar. Su fuerza radica en la claridad con que los hechos se manifiestan, en lo que de golpe se muestra. Hay ahí una verdad objetiva, independiente del sujeto. No se trata de una afirmación metafísica, sino la constatación del modo en que se lleva a cabo la práctica matemática. Cual si fuéramos matemáticos griegos, seguimos extrayendo la verdad de las figuras. Esto es lo que hemos querido significar al decir que "la figura adquiere el carácter de una proposición". Es tarea de la epistemología de las matemáticas explicar esta noción de evidencia.

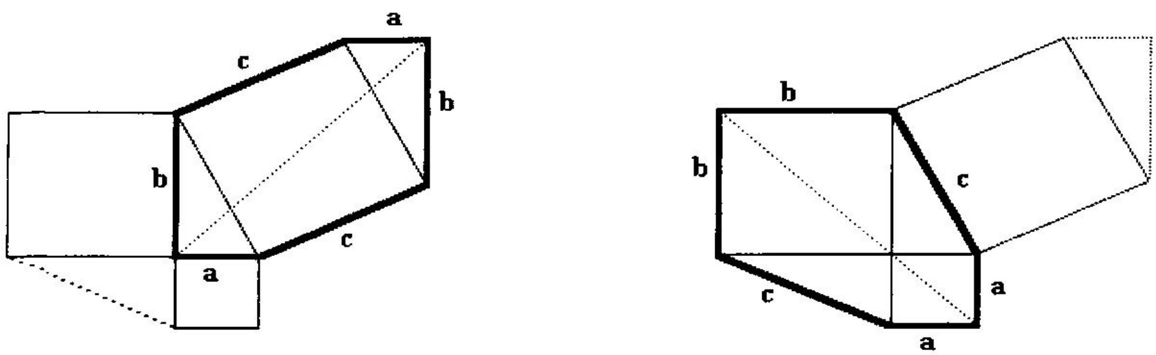
Mostrar y demostrar

Desde siempre, la observación y la evidencia han sido fuentes primarias del conocimiento matemático. En la geometría son múltiples los casos en los que la "verdad" se descubre por medio de la inspección directa de figuras, a través de la evidencia de los sentidos. **Veamos**, por ejemplo, el teorema de Pitágoras (el cual, por cierto, se especula que así fue descubierto):



Mosaico Árabe

La siguiente es una prueba visual del teorema:



Leonardo da Vinci (1452-1519)

Un juego muy frecuente en matemáticas, ya puesta en práctica en el ejemplo de Rivaud, consiste en combinar la escritura con la visualización, es decir, en "escribir" lo que se ve. Para ello se utilizan números y letras en relación a las figuras:

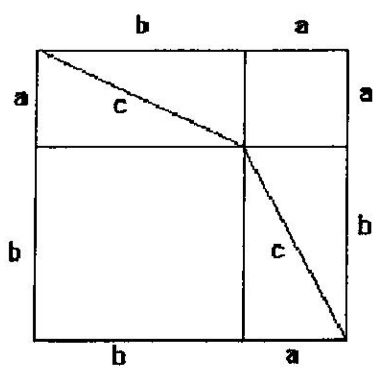


Figura 5

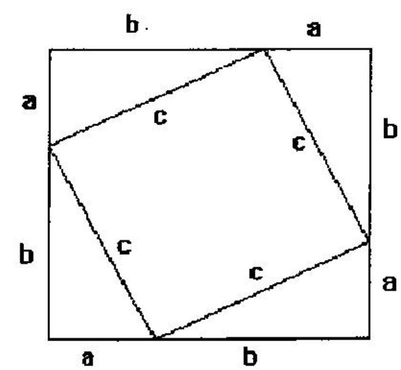


Figura6

Escribamos lo que se muestra en estas figuras:

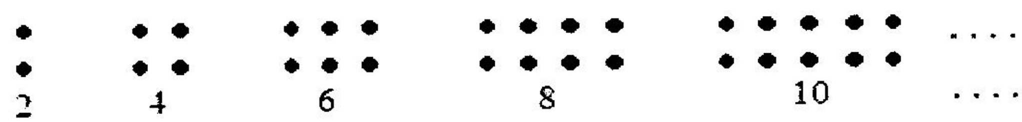
Figura 5 $\quad a^2+b^2 = (a+b)^2-4\dfrac{ab}{2}$ Figura 6 $\quad c^2 = (a+b)^2-4\dfrac{ab}{2}$

La conclusión es simple: $a^2+b^2=c^2$. Esta prueba visual del teorema de Pitágoras supone que al mover los triángulos dentro del cuadrado de lado $a+b$ éstos no se alteran, que las propiedades geométricas de los cuerpos rígidos son las mismas en cualquier lugar.

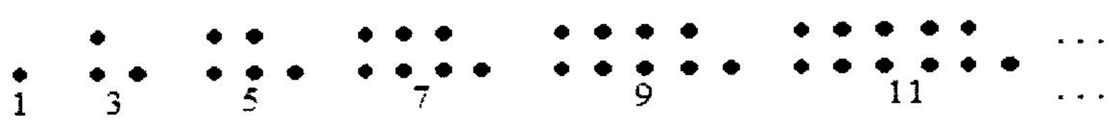
El teorema de Pitágoras expresa una propiedad de los triángulos en términos de números. Dice: *cuando un triángulo es rectángulo, las longitudes de sus lados cumplen la igualdad* $a^2+b^2=c^2$. Esto llevó al descubrimiento de que <u>todas</u> la ternas de números (a, b, c) que cumplen tal relación son los lados de un triángulo rectángulo. Con ello apareció un nuevo problema: el de hallar ternas *pitagóricas*[3]. Como veremos, este problema se puede resolver con base en ciertos conocimientos que podemos adquirir observando configuraciones que representan números, un artificio muy común entre los griegos.

Un *número figurado* es un número que se puede representar en forma geométrica por medio de un arreglo de puntos. La noción queda expuesta en las siguientes figuras:

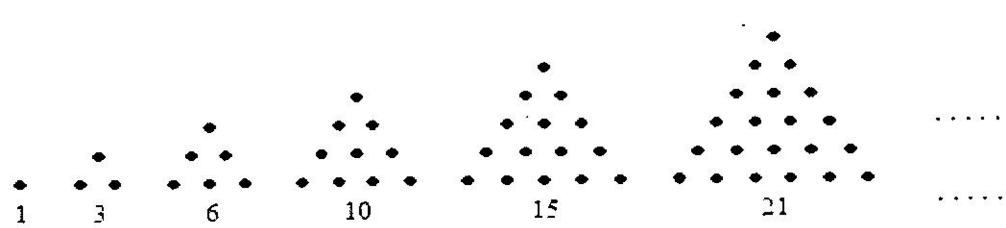
Números pares[4]



Números impares

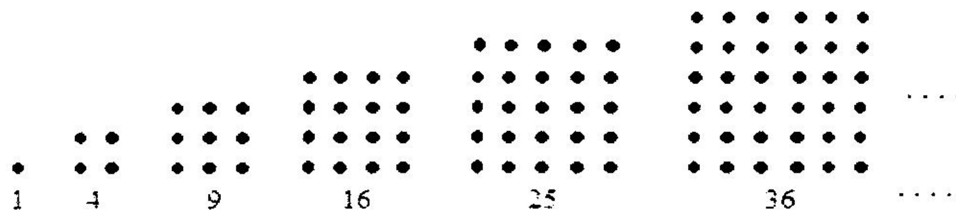


Números triangulares

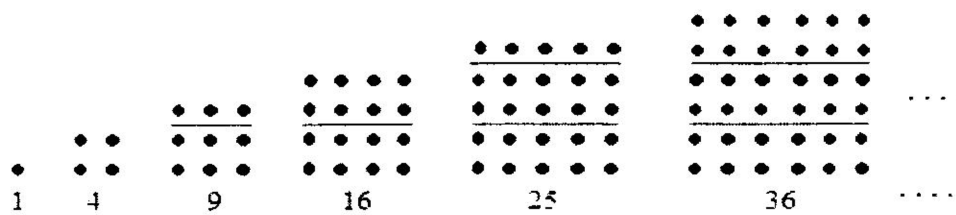


[3]Una terna de números a, b, c se dice que es pitagórica cuando $a^2+b^2=c^2$.

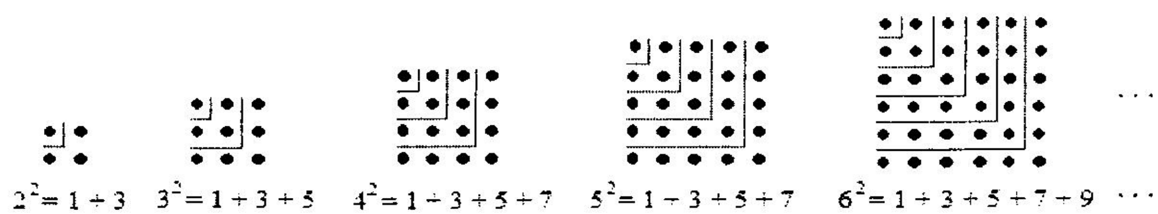
Números cuadrados



Muchas propiedades de los números saltan a la vista en esta representación. **Veamos**:

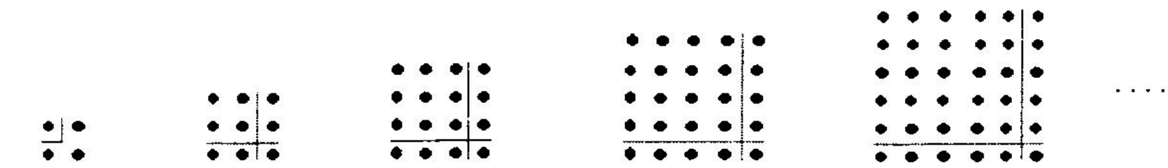


El cuadrado de un número par es par; el de un número impar es impar (los cuadrados son como sus raíces, pares o impares).



Todo número cuadrado es la suma de los números impares menores que el doble de su lado. Los cuadrados crecen como los impares:

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) ; \; (n + 1)^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) .$$



$2^2-1^2=3$ $\quad 3^2-2^2=5$ $\quad 4^2-3^2=7$ $\quad 5^2-4^2=9$ $\quad 6^2-5^2=11$ $\quad \ldots$

La diferencia entre dos cuadrados consecutivos es un número impar:

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1, \quad \text{o bien,} \quad (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1\,.$$

La fórmula anterior enuncia una relación entre los números cuadrados y los nones. dicetodo impar es la diferencia de dos cuadrados consecutivos. Escribamos esta relación en una tabla.

Enteros:	1		2		3		**4**		**5**		6		7		8	
Cuadrados:	1		4		9		16		25		36		49		64	
Impares:		3		5		7		$\boxed{\mathbf{9}}$		11		13		15		17

9		10		11		**12**		**13**		14		15		16	
81		100		121		144		169		196		225		256	
	19		21		23		$\boxed{\mathbf{25}}$		27		29		31		33

17		18		19		20		21		22		23		**24**	
289		324		361		400		441		484		529		576	
	35		37		39		41		43		45		47		

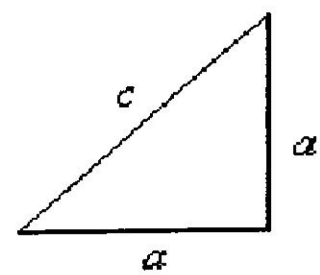
	25		26		27 ...
	625		676		729 ...
$\boxed{\mathbf{49}}$		51		53	...

Cada número impar es la diferencia de los cuadrados arriba de él. Para encontrar dos cuadrados cuya suma es un cuadrado basta con tomar del último renglón de la tabla aquellos nones que también son cuadrados. Así, por simple inspección, podemos hallar números enteros que sean los lados de un triángulo rectángulo. Por ejemplo, como $25 = 5^2$, el triángulo de lados 5, 12, 13 es rectángulo; y como $49 = 7^2$, el triángulo de lados 7, 24, 25 también lo es. La regla es: cada número cuadrado e impar determina, junto con los cuadrados arriba de él, un triángulo rectángulo de lados enteros[5]. El método, claro está, se apoya decididamente en un procedimiento visual.

[5]Conociendo esta regla fue algo natural que los antiguos griegos buscaran una fórmula que permitiera encontrar las ternas de números que determina. La fórmula es: $a = \frac{1}{2}(m^2-1), b = m^2$ y $c = \frac{1}{2}(m^2+1)$, con m un número impar.

Lo que no existe no se puede mostrar

Un caso particular del problema que nos ocupa es el siguiente: *hallar números enteros que sean los lados de un triángulo rectángulo isósceles* (el que tiene dos lados iguales). Una vez en posesión del teorema de Pitágoras es natural considerar el problema a la luz de las relaciones numéricas que implica. Veamos:



Según el Teorema de Pitágoras, las longitudes de los lados del triángulo deberán satisfacer la relación numérica $a^2 + a^2 = c^2$, o bien,

$$2a^2 = c^2 .$$

La relación es muy simple: el cuadrado de c es el doble del cuadrado de a; a^2 y c^2 son dos cuadrados tales que el segundo es el doble del primero. El problema aritmético que se plantea es igualmente simple: encontrar un número cuadrado que sea el doble de otro cuadrado[6].

Para acometer esta dificultad podemos recurrir a un procedimiento que ya probó su eficacia: enumerar en tres renglones los números implicados –en este caso los enteros, sus cuadrados y los dobles de sus cuadrados– y buscar en el tercero de ellos aquellos que sean cuadrados.

Enteros:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Cuadrados:	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169
Impares:	2	8	18	32	50	72	98	128	162	200	242	288	338

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
196	225	256	289	324	361	400	441	484	529	576	625	6792
392	450	512	578	648	722	800	882	968	1058	1152	1250	1352

27	28	...
729	784	...
1458	1568	...

[6]Nuevamente nos enfrentamos al hecho de que para solucionar una cuestión geométrica debemos resolver un problema aritmético, característica que en los tiempos modernos distingue a la geometría analítica.

Hoy en día sabemos lo inútil de continuar la revisión del tercer renglón en busca de un cuadrado, pues por este camino no llegaremos a una solución. No hay un cuadrado cuyo doble sea otro cuadrado. Pero, ¿cómo se llegó a saber esto? Respuesta: mediante un razonamiento. **Pensemos**. Al buscar en el tercer renglón de la lista un número que sea cuadrado, puede ser que éste jamás aparezca. De ser así, la simple inspección de la tabla no lo dirá: nuestra búsqueda es finita y la enumeración infinita. El procedimiento utilizado sólo es capaz de *mostrar* un número con tales características cuando lo hay, pero es incapaz de dar una respuesta cuando no lo hay.

La solución la podemos alcanzar mediante el siguiente razonamiento. Supongamos que se ha encontrado en el tercer renglón un primer número cuadrado, digamos a^2. Como este número es el doble de otro cuadrado, se tiene

$$a^2 = 2b^2 .$$

Es obvio que $b^2 < a^2$. Como a^2 es par, a también es par (se trata, como ya hemos visto, de un conocimiento con raíces sensoriales), de modo que para algún número c:

$$a = 2c .$$

En consecuencia

$$2b^2 = 4c^2$$

y

$$b^2 = 2c^2 .$$

Según esto, b^2 es el doble de otro cuadrado y es menor que a^2. Por tanto, antes de llegar a un primer cuadrado en el tercer renglón la lista, ya deberíamos haber llegado a otro menor que él. En otras palabras: entre la unidad y el "primer" cuadrado que es el doble de otro cuadrado, ¡por fuerza debería haber uno más!. Esto *demuestra* la imposibilidad de que tal número exista: al buscar en la lista un cuadrado que sea el doble de otro cuadrado, nunca lo encontraremos.

Hemos *demostrado* lo siguiente:

No hay un número cuadrado que sea el doble de otro cuadrado.

o bien,

Ningún triángulo rectángulo isósceles tiene lados enteros.

Se trata de un conocimiento cuya verdad no se descubre por medio de la inspección de figuras o a través de la evidencia de los sentidos: *Lo que no existe no se puede mostrar*[7]. Es sólo mediante un argumento

[7] La etimología de las palabras *mostrar y demostrar* nos da un indicativo de

que podemos saber de la inexistencia de un número cuadrado que sea el doble de otro cuadrado[8]. Esto justifica la necesidad de la demostración en matemáticas. Sin ella, jamás tendríamos conocimiento de este hecho. Es únicamente por demostración que podemos saber de aquello que no se puede mostrar, de aquello que trasciende lo que se muestra.

Este fue, digamos, el *leit motiv* del trabajo con Falcón. Hay un límite para lo que se puede alcanzar por simple observación de figuras. Históricamente, se trata de uno de los móviles que llevaron a la organización deductiva de la geometría. No obstante, la visualización no dejó de ocupar un importante lugar en la matemática, incluso en su reconstrucción axiomática.

Axiomática e intuición

La geometría euclidiana, en su presentación axiomática, no abandona el razonamiento sobre figuras. Por el contrario, es sobre éstas que se elaboran las demostraciones, haciendo de las figuras una parte esencial del argumento. Un atento examen de los *Elementos* será suficiente para convencerse de lo anterior. Cierto, la forma de cada argumento hace ver que éste es aplicable a cualquier figura de la misma especie (en ello radica su universalidad), más no por ello se libera de su presencia. Sin las figuras, las demostración euclidiana se viene abajo. Al mismo tiempo, son las figuras las que dan significado a las proposiciones de los *Elementos* y las hacen comprensibles.

De alguna manera, la demostración euclidiana devuelve a las figuras la verdad que tomó de ellas, pero lo hace otorgándoles un carácter de necesidad lógica ausente en un principio.

Lo anterior señala uno de los vínculos más importantes entre la tendencia visual y la tendencia deductiva en matemáticas. Cuando una teoría se organiza deductivamente (método axiomático), el ideal es que la demostración sea la única condición de ingreso a la misma. No obstante, aun cuando esta condición se satisfaga plenamente, aquello que se demuestra debe conocerse –o, al menos, conjeturarse– de antemano. No debemos olvidar que la axiomática no es en sí un método

esta separación. Mostrar. Del Latín *Monstrare* "indicar, advertir". Señalar una cosa para que se vea. El prefijo "de" deriva en este caso del latín "Dê", "apartarse de"; Demostrar: "apartarse de lo que se muestra".

[8]Esta es, de hecho, la demostración pitagórica de la irracionalidad de raíz de 2. Se trata de la primer demostración por reducción al absurdo conocida en la historia de las matemáticas.

de descubrimiento, sino una forma de presentar los hechos conocidos[9]. Así sucede en la práctica matemática, donde lo que se prueba en una teoría axiomática primero se descubre mediante la observación, la experimentación, la generalización y uno que otro chispazo divino. En esto, las figuras y los diagramas ocupan un lugar de privilegio[10].

Recíprocamente, el uso de las figuras como vía de descubrimiento hace necesaria la demostración a fin de incorporar lo nuevo a la teoría. Una figura sólo muestra una verdad, y poco dice de los vínculos deductivos entre el hecho observado y los otros hechos conocidos. Esto último es tarea de la axiomática.

Saber y entender

Hasta aquí, nuestro análisis se ha restringido al papel de la evidencia intuitiva como fuente de conocimientos. Un segundo aspecto igualmente importante es el modo en que se relaciona con la demostración, donde según el canon de la lógica debería estar ausente.

En un sentido estricto, una demostración debería ser una simple sucesión de pasos lógicos que lleva a la conclusión deseada. No obstante, en la práctica matemática lo que encontramos es una mezcla de argumentos intuitivos y argumentos lógicos. Esto tiene al menos dos causas. Primero, que una demostración estrictamente lógica de una afirmación como, digamos, el teorema fundamental del cálculo, sería prohibitivamente larga; segundo, que desde siempre los matemáticos han querido entender lo que se demuestra, en vez de sólo aceptarlo forzados por la lógica. Saber y entender no son lo mismo. En este sentido, figuras y diagramas suelen ser de gran utilidad. Consideremos, por ejemplo, la tradicional prueba de convergencia de una serie geométrica cuya razón r es menor que 1.

Teorema 1. *Si* $0 < r < 1$, *entonces* $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}$.

[9]En realidad, cuando se trata de probar una proposición en una teoría axiomática, la teoría en sí no sugiere nada. El camino a seguir se elige por fuera. Al respecto, hay demostraciones visuales que sugieren claramente la forma en que el teorema se demuestra lógicamente. Como ejemplo, véase la prueba visual del teorema de Pitágoras que se halla en http://www.shef.ac.uk/ puremath/theorems/pythag.html, en la cual la demostración dada por Euclides en I.47 se recrea a través de una animación que pone de manifiesto su origen visual.

[10]Paul R. Halmos habría dicho en alguna ocasión: "Resolver un problema matemático no es un acto deductivo". Aquí también, hay un llamado a la intuición y a la imaginación como elementos centrales de la matemática, a la que incluso se le valora como un arte creativo.

Demostración: Sea $S_n = 1 + r + \cdots + r^n$.

Tenemos $S_{n+1} = 1 + r + \cdots + r^n + r^{n+1} = S_n + r^{n+1}$.

También tenemos $S_{n+1} = 1+(r+\cdots+r^n+r^{n+1}) = 1+r(1+\cdots+r^n) = 1 + rS_n$.

Por tanto, $S_n + r^{n+1} = 1 + rS_n$.

Agrupando y factorizando resulta que $S_n(1 - r) = 1 - r^{n+1}$.

Despejando S_n:

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Nótese que $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$, pues $0 < r < 1$. Por tanto, $S_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-r}$, l.c.q.d. □

Lo anterior es una demostración rigurosa desarrollada en el marco de la teoría de los números reales. La prueba nos obliga a aceptar una infinidad de hechos. Por ejemplo, nos fuerza a admitir que

$$1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\cdots+\left(\frac{9}{10}\right)^n+\ldots=1+\frac{9}{10}+\frac{81}{100}+\frac{729}{1000}+\ldots=10$$

Pese a la firmeza del argumento, hay un aspecto de la prueba que no nos deja satisfechos. Con base en ella sabemos que la serie converge, e incluso sabemos a qué número lo hace. No obstante, la demostración no nos deja una clara comprensión de porqué las cosas son así, pues se basa en una serie de manipulaciones algebraicas poco significativas. Aclara muy poco decir: "Si descomponemos la suma S_{n+1} de tal y tal otra manera, igualamos, agrupamos, factorizamos y despejamos, obtenemos un cociente a partir del cual llegaremos a la igualdad prometida tomando el límite cuando n tiende a infinito". La posibilidad de expresar una suma de dos maneras distintas es un artificio que nada explica. Conduce al resultado propuesto y nadamás. Volvemos a lo mismo: saber no es lo mismo que entender.

Visualicemos el resultado anterior. A fin de cuentas, se trata de una cuestión de razones y proporciones. Coloquemos en una hilera una sucesión de cuadrados, el primero de lado 1, el segundo de lado r, el tercero de lado r^2, el cuarto de lado r^3 y así sucesivamente, como en la Figura 7, y tracemos los triángulos en color de la Figura 8.

La verdad del resultado se torna evidente tras una atenta observación de la figura 8. Un hecho salta a la vista: todos los triángulos que aparecen son semejantes entre sí, incluyendo al triángulo ABC.

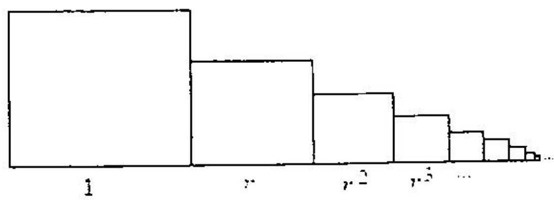


Figura 7

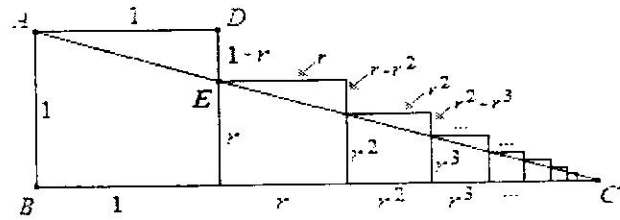


Figura 8

Esto se puede corroborar numéricamente mediante un simple cálculo de las proporciones entre los lados correspondientes. En particular, $\triangle ABC \cong \triangle ADE$. Por tanto, $BC/AD = AB/DE$. Nótese que la base BC del triángulo ABC corresponde a la suma cuyo valor queremos calcular. Nótese también que $BA = AD = 1$ y $DE = 1 - r$, de modo que la unidad es la media geométrica entre la suma y $1 - r$:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1 - r} \qquad (\#)$$

La Figura 8 muestra la geometría detrás de la igualdad anterior. En ella, la verdad del teorema se ve casi de inmediato, acercándonos de este modo al ideal de toda prueba visual. Todo se resuelve en la semejanza de triángulos, uno de los cuales tiene como lado la suma buscada. Frente a la árida manipulación algebraica, se trata de un salto hacia la comprensión. El resultado se torna evidente y lo admitimos no sólo porque cuenta con una prueba formal, sino porque entendemos cómo se inserta en el dominio de los hechos matemáticos. Podemos explicarlo como sigue: toda sucesión geométrica de la forma $s(n) = r^n$, con $0 < r < 1$, tienen la propiedad de que la suma de sus términos es la base de un triángulo rectángulo cuya altura es la unidad y cuyos lados son proporcionales a los números $1r$ y 1, respectivamente. Este hecho tiene como consecuencia la posibilidad de expresar la suma con la igualdad (#). Entender el resultado significa en este caso *enlazarlo con otros dominios y conceptos*[11].

[11] Hay otro sentido no menos importante de lo que significa "entender" un resultado. Jaime Óscar Falcón solía narrar un caso notable. En cierta ocasión, algunos profesores de física del CCH Sur (a nivel de bachillerato, en la ciudad de México) decidieron entrevistar en el pasillo a los estudiantes que salían de un examen sobre la ley de la inercia. El propósito era descubrir qué tanto habían comprendido los contenidos del curso de física. La pregunta era: "Si lanzamos una piedra a lo largo de este corredor (el cual se hallaba perfectamente pulido), ¿ésta se detendrá?". La mayoría respondió que el objeto se detendría. Al preguntarles por la causa de la de-

Al respecto, diremos que el valor de una demostración se juzga con base en dos criterios: por la luz que proyecta sobre el resultado (es decir, cuán claro lo hace al entendimiento), y por las perspectivas y posibilidades que abre (es decir, por los vínculos que establece con otros hechos o dominios). Esto explica la proliferación de demostraciones para un mismo resultado y el uso frecuente de figuras. En cuanto a la sencillez o brevedad del argumento, ésta sólo es importante en relación a la belleza o elegancia de la demostración y está supeditada a la comprensión del resultado. Una demostración breve pero poco inteligible no tiene mayor atractivo. Como dice Yuri I. Manin[12], es necesario distinguir entre el conocimiento de la verdad matemática y la comprensión de las matemáticas. En esto último, las figuras suelen ser de gran ayuda. El ejemplo que hemos dado es ilustrativo de esta situación.

Ver como los ángeles

Abramos un paréntesis para considerar un punto de vista que proyecta alguna luz sobre lo que intentamos decir. Consideremos la manera en que la filosofía escolástica describe el funcionamiento de la mente humana. Según la escolástica, la actividad mental de todo sujeto cognoscente comprende tres momentos. El primero de ellos es lo que constituye al intelecto (*intellectus*): "Inteligir (*intelligere*), dice Santo Tomás, es la simple captación (i. e., indivisible, no compuesta) de una verdad manifiesta." El segundo acto es la posibilidad de juzgar o formar juicios (*iudicare*), esto es, de decidir en torno a cosas que pueden ser de una manera u otra[13]. Por último está el razonamiento (*rationari*), es decir, "el avance progresivo hacia una verdad inteligible, yendo de un punto

tención, la respuesta más común fue: "porque *se tiene* que detener". Un argumento perfectamente aristotélico. Lo sorprendente es que muchos de ellos habían resuelto correctamente los problemas relativos a la ley de la inercia en el examen. Un ejercicio formal, sin ninguna comprensión real del significado de los conceptos involucrados. En la Facultad de Ciencias de la UNAM tuve la oportunidad de constatar algo semejante. Un estudiante, que conocía en detalle la demostración euclidiana del teorema de Pitágoras, no entendía cómo se relaciona este teorema con la fórmula de la distancia en el plano euclidiano, la cual le parecía una arbitrariedad, ni aceptaba la construcción empírica de un triángulo rectángulo con una cuerda en la que se han practicado 13 nudos a intervalos iguales (es decir, no entendía cómo aplicar el teorema).

[12](Manin, 1990, p. 1670).

[13]En la filosofía moderna se considera al juicio como el acto u operación de la mente que se expresa en la proposición, remarcando con ello el carácter lógico del acto de juzgar.