Al respecto, diremos que el valor de una demostración se juzga con base en dos criterios: por la luz que proyecta sobre el resultado (es decir, cuán claro lo hace al entendimiento), y por las perspectivas y posibilidades que abre (es decir, por los vínculos que establece con otros hechos o dominios). Esto explica la proliferación de demostraciones para un mismo resultado y el uso frecuente de figuras. En cuanto a la sencillez o brevedad del argumento, ésta sólo es importante en relación a la belleza o elegancia de la demostración y está supeditada a la comprensión del resultado. Una demostración breve pero poco inteligible no tiene mayor atractivo. Como dice Yuri I. Manin[12], es necesario distinguir entre el conocimiento de la verdad matemática y la comprensión de las matemáticas. En esto último, las figuras suelen ser de gran ayuda. El ejemplo que hemos dado es ilustrativo de esta situación.

Ver como los ángeles

Abramos un paréntesis para considerar un punto de vista que proyecta alguna luz sobre lo que intentamos decir. Consideremos la manera en que la filosofía escolástica describe el funcionamiento de la mente humana. Según la escolástica, la actividad mental de todo sujeto cognoscente comprende tres momentos. El primero de ellos es lo que constituye al intelecto (*intellectus*): "Inteligir (*intelligere*), dice Santo Tomás, es la simple captación (i. e., indivisible, no compuesta) de una verdad manifiesta." El segundo acto es la posibilidad de juzgar o formar juicios (*iudicare*), esto es, de decidir en torno a cosas que pueden ser de una manera u otra[13]. Por último está el razonamiento (*rationari*), es decir, "el avance progresivo hacia una verdad inteligible, yendo de un punto

tención, la respuesta más común fue: "porque *se tiene* que detener". Un argumento perfectamente aristotélico. Lo sorprendente es que muchos de ellos habían resuelto correctamente los problemas relativos a la ley de la inercia en el examen. Un ejercicio formal, sin ninguna comprensión real del significado de los conceptos involucrados. En la Facultad de Ciencias de la UNAM tuve la oportunidad de constatar algo semejante. Un estudiante, que conocía en detalle la demostración euclidiana del teorema de Pitágoras, no entendía cómo se relaciona este teorema con la fórmula de la distancia en el plano euclidiano, la cual le parecía una arbitrariedad, ni aceptaba la construcción empírica de un triángulo rectángulo con una cuerda en la que se han practicado 13 nudos a intervalos iguales (es decir, no entendía cómo aplicar el teorema).

[12](Manin, 1990, p. 1670).

[13]En la filosofía moderna se considera al juicio como el acto u operación de la mente que se expresa en la proposición, remarcando con ello el carácter lógico del acto de juzgar.

ya comprendido (*intellecto*) a otro."[14] Todo ser racional, para conocer. debe emplear estos tres actos de la mente: *inteligir*, *juzgar* y *razonar*[15].

Conforme a la escolástica, el raciocinio es la menor de las facultades que ejerce el alma racional[16]. La mayor y más importante es el *intelecto*. Los humanos ejercen esta facultad cuando simplemente "ven" una verdad; en cambio, el raciocinio procede paulatinamente para alcanzar la verdad cuando ésta no es evidente por sí misma. Sólo los ángeles (*intelligentia*) pueden ver, siempre y en todo lugar, todas las verdades. Dice C. S. Lewis:

> Disfrutamos del *intelecto* cuando "sólo vemos" una verdad autoevidente [básica]; ejercitamos la *razón* cuando procedemos paso a paso para probar una verdad que no es autoevidente. Una vida cognitiva en la que toda verdad pudiera ser simplemente vista sería la vida de una *intelligentia*, de un ángel. Una vida de una razón absoluta, donde nada sería simplemente "visto" y todo tuviera que ser probado, sería presuntamente imposible; pues nada se puede probar si nada es autoevidente. La vida mental del hombre se consume laboriosamente conectando estos

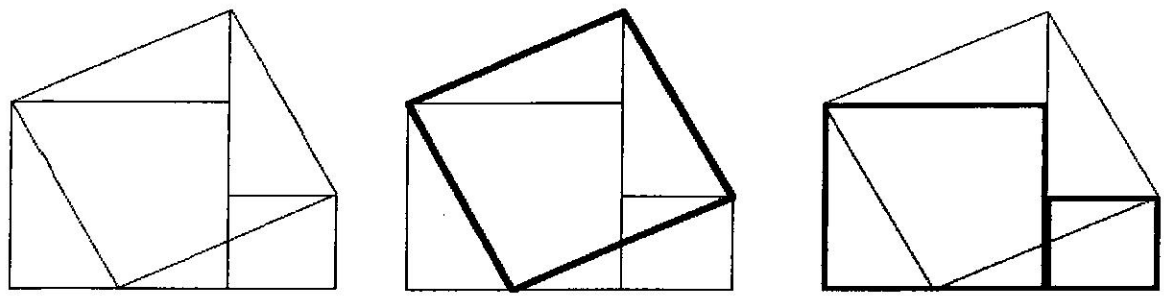
[14]Santo Tomás de Aquino. Citado en (Lewis, 1994, p.157). Este tercer acto lo podemos describir como la facultad de pensar ilada o lógicamente, es decir, como la capacidad de manipular en el pensamiento premisas y creencias con apego a los principios de la lógica para ver sus conexiones y alcanzar conclusiones.

[15]Veamos un ejemplo. Observo a Juan José Rivaud, que se halla en este recinto. Intelijo que tiene la barba blanca. Esa es una verdad autoevidente. Juzgo entonces que debe ser un hombre mayor, esto es, decido en torno a algo que puede ser de una u otra manera. Por último, infiero que debe ser testarudo, pues creo que todos los hombres mayores lo son. Este "conocimiento" lo he alcanzado sirviéndome de los tres actos de la mente, si bien en este caso podría haber constatado el hecho por otros caminos (de manera directa, por ejemplo). [Nota: este ejemplo lo utilicé en la presentación de este trabajo en las *VI Jornadas de Historia y Filosofía de las Matemáticas*, celebradas en la ciudad de Guanajuato en septiembre de 2003. Desde luego, en la sesión se hallaba Juan José Rivaud. Gracias a su amabilidad, y a la amistad que nos une, Juanjo, como afectuosamente le decimos, me ha autorizado a incluir el ejemplo en esta versión por escrito, el cual no encierra ninguna segunda intención más allá de la de gastarle una broma].

[16]Esta actitud discriminatoria hacia el raciocinio sigue presente en nuestro tiempo. "El conocimiento, escribe Illtyd Trethowan, es básicamente una cuestión de ver las cosas ... los argumentos, los procesos de razonamiento, son de segunda importancia, y esto no sólo se debe a que sin conocimiento o comprensión directa ningún proceso de pensamiento se podría poner en marcha, sino también porque el punto de esos procesos es originar nuevas aprehensiones" (Citado por Roy Varghese en (Varghese, 2003, p. 5-6)). Esta idea se ve reforzada por el hecho de que las computadoras han podido imitar el *razonamiento* y el *cálculo* humanos, es decir, "el tercer acto de la mente", mientras que los otros dos actos, *inteligir* y *juzgar*, están lejos de ser imitados de la misma manera a pesar de su importancia.

destellos frecuentes, aunque momentáneos, de *intelligentia* que constituyen el intelecto.[17]

Aprehenderlo todo de golpe, mirar como miran los ángeles. Ese sería el ideal de una vida de comprensión matemática. A nosotros, lo más cercano a este ideal, a la *intelligentia*, nos lo dan las figuras. Veamos de nuevo el teorema de Pitágoras:



Teorema de Pitágoras (H. Perigal, 1873)[18]

Este grado de comprensión es quizá lo más elevado a que podemos aspirar. Tal como lo advierte Lewis, en la matemática no podemos prescindir de tales actos de aprehensión, pues es mediante la evidencia que innumerables hechos se introducen al espacio de las razones[19].

La evidencia sensible

Veamos la siguiente figura:

[17](Lewis, 1994, p.157). Esta habilidad de la mente para "ver" las verdades que constituyen la realidad, para captar las cosas como son en sí mismas, es lo que Roy Abraham Varghese denomina sentido *sapiensal.* En su opinión, esta capacidad de "ver" las verdades trasciende la esfera de la ciencia (la cual se limita a los datos de los sentidos) y de la lógica (que se limita a "desempaquetar" las conclusiones ya contenidas en las premisas).

[19]Pudiera parecer que aquí se repite la antigua creencia de que los objetos matemáticos nos son dados con su estructura. A la matemática le costó más de dos mil años superar este punto de vista. No obstante, en casos como este, donde de figuras se trata, es claro que nuestro sentido de la evidencia asigna a los objetos propiedades específicas, sin importar que esto sea un hecho cultural. A fin de cuentas estamos hablando de la matemática heredada a nosotros por los griegos. A nivel individual, la creencia anterior sólo se supera tras un largo período de adiestramiento matemático y no sin pocos esfuerzos.

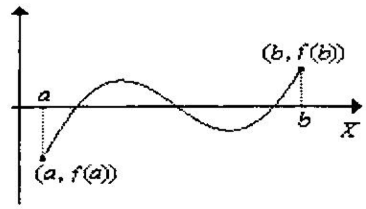


Figura 9. Piense usted en Bolzano

Es evidente que la curva considerada corta al eje X. A este hecho se le conoce como *teorema de Bolzano.* Todo buen profesor de matemáticas comienza la explicación del teorema con una figura como la anterior. La figura en sí no prueba nada, pero sirve como un indicativo de una situación general: Si una función continua cambia de signo en un intervalo, por fuerza pasa por un cero. El dibujo muestra lo que esperamos de las funciones continuas, e impone a cualquier presentación axiomática la tarea de reconstruir tales hechos. Históricamente, la necesidad de dar una prueba rigurosa de este resultado y similares llevó, entre otras cosas, a la definición de número real propuesta por Cantor y Dedekind (axioma de continuidad)[20]. Tal construcción teórica era necesaria para dar cuenta del comportamiento de los objetos geométricos. En su forma analítica, el teorema se enuncia así:

Teorema de Bolzano. *Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, y si en los extremos del intervalo la función $f(x)$ toma valores de signo opuesto ($f(a) \cdot f(b) < 0$), entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ para el que se cumple: $f(c) = 0$.*

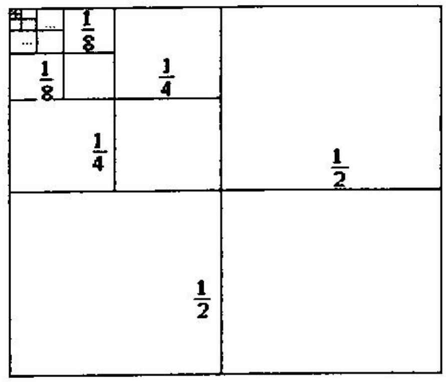
Este ejemplo nos recuerda que las figuras no sólo son una herramienta para la comprensión de las matemáticas, sino una fuente de nociones y conocimientos. ¿Por qué definimos los números reales de tal manera y no de tal otra? Respuesta: porque una definición correcta es aquella que nos permite probar cosas tales como el teorema de Bolzano. No es que la validez del teorema descanse en su prueba formal. Más bien, las cosas son a la inversa: la teoría es aceptable porque prueba teoremas como el de Bolzano.

Es indiscutible que gran parte del conocimiento matemático tiene sus raíces en la evidencia sensible. Aquí, por "evidencia" entendemos la autopresentación de un hecho u objeto para ser simplemente visto[21]. A través de ella es que introducimos tal hecho en el dominio de la

[20] Véase (Dedekind, 1988, p. 12).

[21] Claro, cuando lo miramos de cierta manera.

razón. Posteriormente, es tarea de ésta última insertarlo en la jerarquía deductiva. Observemos la siguiente figura:



Una atenta mirada mostrará que se trata de una prueba visual de $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{3}$.

El valor de la visualización es innegable en este caso: contribuye directamente al cuerpo de nuestros conocimientos matemáticos. Un hecho tan simple como este reclama para las pruebas visuales un lugar al lado de las pruebas deductivas, y trae a colación el problema de cuáles deberían ser los criterios epistemológicos para considerar algo como una prueba aceptable. Según Peter Borwein Loki Jörgenson, tales criterios deberían incluir al menos los siguientes puntos[22]:

1. Confiabilidad. Que los medios subyacentes para alcanzar la prueba sean confiables, y que el resultado no varíe con cada inspección.
2. Consistencia. Que los medios y el fin de la prueba sean consistentes con otros hechos, creencias o pruebas conocidas.
3. Repetibilidad. Que la prueba la puedan confirmar o repetir otros.

Al respecto, cualesquiera que sean los criterios para la aceptación de algo como una prueba, no podemos dejar fuera la noción clásica de demostración. No se trata de substituir una cosa con otra, sino de ampliar los horizontes. No somos ángeles, no podemos ver siempre y en todo lugar todas las verdades. Por el contrario, muchas de ellas las debemos inferir argumentando paso a paso. El raciocinio tiene como función precisamente subsanar tales carencias, sobre todo, como ya lo

[22]Véase http://www.cecm.sfu.ca/ loki/Papers/Numbers/Numbers.html.

hemos visto, en relación a lo que no se puede mostrar. Aún así, de vez en cuando nos es dado descubrir una nueva verdad mirando como miran los ángeles, ampliando con ello nuestros conocimientos.

Metafórica o no, esta observación sintetiza parte de la relación existente entre la matemática visual y la matemática demostrativa. De sus otros vínculos nos ocupamos en lo que sigue.

Lo visual y lo deductivo

En 1945 Jacques Hadamard realizó una investigación entre algunos matemáticos a fin de determinar sus métodos de trabajo. La conclusión a la que llegó fue sorprendente: casi todos ellos, salvo contadas excepciones, dijeron no atacar los problemas en términos verbales o algebraicos, sino con base en una vaga imaginación visual. El mismo Einstein escribió: "Las palabras del lenguaje tal como se escriben o se hablan no parecen desempeñar ningún papel en mi mecanismo de pensamiento. Las entidades físicas que al parecer sirven como elementos de pensamiento son ciertos signos y ciertas imágenes más o menos claras, que pueden reproducirse y combinarse 'voluntariamente'. [...] Los elementos mencionados son, en mi caso, de tipo visual y algunos de tipo muscular."[23]

Tal parece que muchos matemáticos son o han sido buenos visualizadores (una excepción sería George Polya). El mismo Hadamard opina que el pensamiento matemático es visual, y que las palabras sólo interfieren[24]. Esta postura parece negar la tesis según la cual la matemática es una ciencia deductiva. Lo podrá ser en su forma final, pero no en su elaboración. De ser así, la estricta deducción lógica sólo intervendría al traducir a palabras los resultados alcanzados, al organizar y ordenar las teorías, al escribir libros de texto. Sólo entonces vendrían las palabras convencionales y las reglas de la lógica tradicional. Esto en modo alguno niega la existencia de fuertes vínculos entre el 'pensamiento' visual y el pensamiento lógico. Significa simplemente que desde el punto de vista del descubrimiento, el factor visual o intuitivo es primordial en la matemática.

La oposición entre lo visual y lo deductivo en las matemáticas ya tiene tiempo. En uno de sus extremos tenemos, por ejemplo, a Gauss, quien lamenta no poder representar cierto tipo de ecuaciones median-

[23] Albert Einstein, Carta a Jacques Hadamard, citada en http://www.sv.vt.edu/classes/ESM4714/Gen_Prin/vizthink.html.

[24] Véase (Hadamard, 1996).

te curvas para profundizar en su estudio. Su principal obstáculo es el enorme volumen de cálculos requeridos: su aflicción se debe a que no puede conjeturar nada sin el recurso a la visualización[25].

En el otro extremo tenemos, por ejemplo, a Lagrange y Laplace, quienes con sus trabajos sobre mecánica hicieron caer en descrédito el uso de figuras e imágenes[26]. Simplemente, suprimieron las figuras para dar paso al pensamiento analítico. La sola realización de sus obras fue considerada una gloria del análisis. Esta postura se agudizó en el siglo diecinueve con la aparición, entre otras cosas, de curvas continuas como las de Weierstrass, von Koch y Peano que el ojo no puede ni siquiera percibir (o que al hacerlo percibe en realidad otras cosas), y con la renovación del método axiomático. Fue entonces que la manipulación simbólica y la expresión escrita buscaron substituir a las figuras e imágenes.

Esta actitud antivisual sigue vigente en nuestros días. Autores como Bourbaki[27] privilegian los aspectos estructurales de la matemática en

---

[25]Hoy en día tomaría segundos generar con una computadora el tipo de dibujos que Gauss necesitaba. Las nuevas tecnologías han aumentado considerablemente nuestra capacidad de visualización en matemáticas. Las gráficas por computadora permiten no sólo mejorar el detalle en las representaciones visuales, sino crear animaciones y programas interactivos cuyo impacto en la investigación y la enseñanza ya se empieza a sentir. Estamos en una época en la que lo visual representa un desafío a la primacía de la palabra. Quizá en la matemática esta tendencia no podrá ir más allá de donde se encuentra, pero en lo social podríamos vernos avasallados por ella.

[26]Lagrange publicó su *Mecánica analítica* en 1788. El tratado resume el trabajo realizado en el terreno de la mecánica desde la época de Newton, transformándolo en una rama del análisis matemático. En el prefacio advierte: "No encontraremos figuras en este trabajo. el método que expongo no requiere construcciones, ni argumentos geométricos o mecánicos, sino únicamente operaciones algebraicas sometidas a un tratamiento regular y uniforme." En cuanto a Laplace, en su *Mecánica celeste* (publicada en cinco volúmenes entre 1799 y 1825) lleva a cabo una discusión analítica del sistema solar. A decir de los especialistas, el texto no es de fácil lectura. Biot, quien lo asistió en la revisión del trabajo, dice que Laplace mismo era a menudo incapaz de recuperar los detalles en la cadena de razonamientos.

[27]*Nicolas Bourbaki* es el seudónimo bajo el cual un grupo de matemáticos, principalmente franceses, han escrito una serie de libros exponiendo el avance de las matemáticas en el siglo veinte. La serie comenzó en 1935. Su propósito es fundamentar la matemática en la teoría de conjuntos con base en un rigor extremo, para lo cual incluso han inventado nuevos términos y conceptos. El grupo ha producido más de 30 volúmenes, muchos de ellos bajo el título general de *Éléments de Mathématique*.
Para una lista de sus obras véase:

http://www.its.caltech.edu/ ljpk/bourbaki.html.

detrimento de la comprensión intuitiva. Uno de los problemas derivados de este punto de vista es la identificación de la matemática con una de sus facetas. Se le caracteriza, por ejemplo, como una ciencia deductiva en la que el estándar de rigor es la demostración lógica y se le identifica con el método axiomático. De la historia de las matemáticas se resaltan sólo los aspectos que refuerzan el punto de vista adoptado. Se habla de los *Elementos* de Euclides sólo en relación al rigor y al método, de la aritmetización del análisis, de la lógica simbólica del siglo diecinueve y de *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead, se alaba el desarrollo de la teoría de conjuntos y su axiomatización, se enaltece la axiomática de Zermelo-Fraenkel como un fundamento para la matemática. De la *Geometría* de Descartes se da una visión parcial: su mérito radica en que permite tratar numéricamente los problemas geométricos, es decir, en que nos da la clave para reducir la geometría al número[28]. ¿No sería igualmente cierto decir que en su momento el método de las coordenadas significó un gran avance en el otro sentido? ¿Es acaso un desatino decir que su introducción renovó la manera en que los matemáticos piensan las matemáticas, precisamente porque permite *ver* mejor las cosas? ¿No es acaso que el método de las coordenadas permite ver las funciones geométricamente, tal como Gauss lo procura? ¿Podríamos hablar de los números complejos, de los sistemas dinámicos o de las curvas fractales como lo hacemos sin el recurso a la visualización? En realidad, lo que Descartes hizo fue mostrar que el método de las coordenadas trabaja en ambos sentidos, relacionando la geometría con el álgebra. No es que la primera se reduzca a la segunda; más bien, se trata de un mutuo enriquecimiento.

En vez de identificar la matemática con el método axiomático, resulta más ventajoso precisar su lugar. ¿Es por simple deducción lógica como construimos la verdad matemática? ¿Todo el pensamiento matemático es deductivo? Es fácil responder a estas preguntas con una negativa observando la práctica matemática, donde figuras, diagramas e imágenes mentales de todo tipo intervienen en la conformación de la verdad, aunque en la exposición axiomática de cada teoría se hallen ausentes o relegadas a un segundo plano.

Ciertamente, como apunta Gian-Carlo Rota, la matemática tiene una doble vida. En la primera de ellas trabaja con hechos. Es un hecho que sólo hay cinco sólidos regulares en el espacio euclidiano, es un hecho que los ángulos interiores de un triángulo suman dos rectos, es un hecho que sólo hay 17 tipos de simetrías en el plano. Eso lo sabemos

[28]Véase si no (Bourbaki, 1972).

con anterioridad a la presentación axiomática. En su segunda vida, la matemática trabaja con pruebas. Una teoría matemática comienza con definiciones y axiomas, y los hechos matemáticos se incorporan a ella mediante pruebas formales. La exposición axiomática es indispensable precisamente porque la verificación visual o experimental no da unidad al conocimiento ni es un criterio de aprobación universal.

Podemos decir entonces que, como en otros dominios, el avance en matemáticas se da en medio de una mezcla tumultuosa de pruebas e intuiciones. Hay un consenso muy amplio en el sentido de que el descubrimiento (o la invención) de nuevos resultados y su demostración formal son procesos distintos. Es más, la posición central del rigor en las pruebas no ha sido una constante en las matemáticas[29].

En la actualidad podemos observar cómo estas dos tendencias siguen presentes al interior de la matemática. Por una parte tenemos un claro regreso a la matemática intuitiva; por la otra, tenemos la emergencia de las pruebas por computadora y la demostración automática de teoremas[30]. No se trata de determinar cuál de ellas será la vencedora. Más bien, debemos esperar que ninguna de ellas lo sea, pues de lo contrario todos seríamos los perdedores[31].

Conclusión

A comienzos del siglo veinte Henri Poincaré y Bertrand Russell se enfrascaron en una discusión en torno a la naturaleza del pensamiento matemático. Poincaré argumenta que éste tiene un carácter intuitivo, no lógico. Russell por su parte arguye que los avances de la lógica permiten demostrar lo contrario; para ello, bastaría con mostrar que todo teorema conocido de la matemática se puede demostrar a partir de un reducido conjunto de axiomas lógicos. Dejando de lado esta última exigencia –que los axiomas sean lógicos–, nos atrevemos a decir que ambos tienen algo de razón. Simplemente, cada quien contempla un aspecto distinto de las matemáticas (digamos, sólo una de las dos vidas en el sentido de Rota), en vez de entenderlas como una totalidad.

[29]Al respecto, véase (Grabiner, 1974), un trabajo donde la autora analiza la transformación del estándar de rigor matemático entre los siglos dieciocho y diecinueve.

[30]Véase (Torres, 2002) y (Kleiner y Movshovitz-Hadar, 1997).

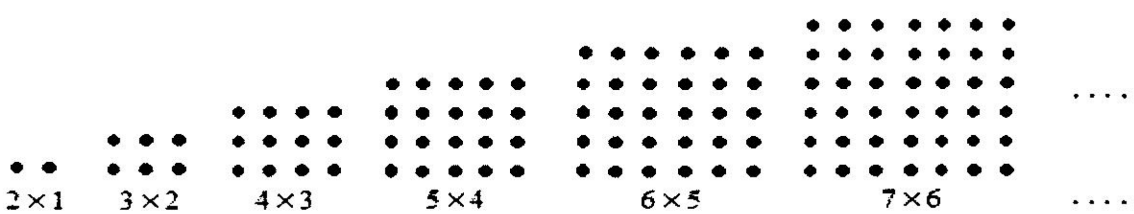
[31]En efecto, somos de la opinión de que ninguna de estas tendencias debería imponerse a la otra. Parafraseando a Kant diremos que una matemática sin figuras e intuiciones es ciega, mientras que una matemática sin pruebas formales no tiene estructura.

Justamente, nuestro propósito en este ensayo ha sido reflexionar en torno al lugar de la visualización en matemáticas e indicar la manera en que ésta se vincula con las pruebas deductivas. Para entender este punto creímos necesario dejar atrás la discusión sobre sí la matemática es intuitiva o formal. En ella coexisten ambos aspectos. Más bien, consideramos que una de las tareas de la filosofía de la matemática es describir cómo se articulan en nuestra ciencia lo intuitivo y lo formal. Aclarar tales vínculos ayudará a esclarecer la dialéctica entre lógica e intuición, lenguaje y pensamiento, forma y contenido, verdad y demostrabilidad, factores siempre presentes en su desarrollo. Si con este pequeño ensayo hemos contribuido, aunque sea minúsculamente, en esta dirección, estaremos satisfechos.

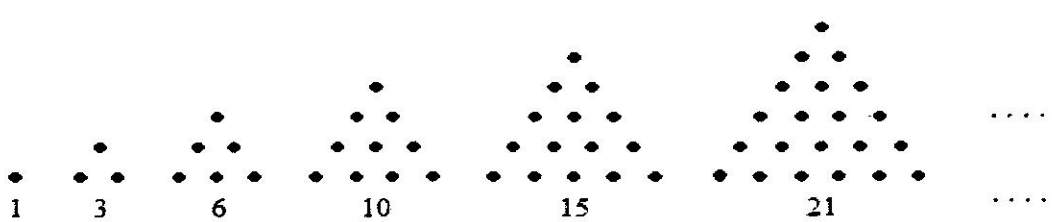
Coda

Para finalizar, obsequiamos al lector cuatro pruebas visuales con un mismo tema: sumas de números. Para empezar, los números oblongos:

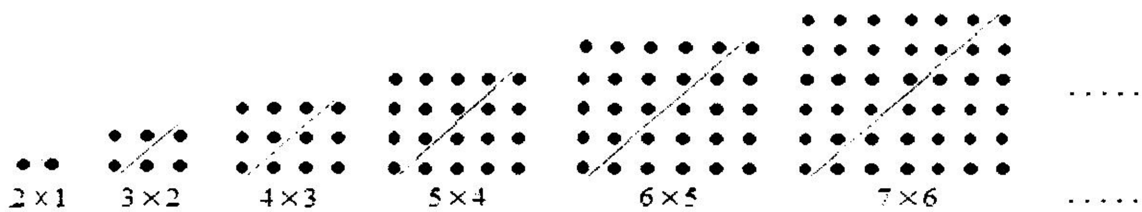
Números oblongos



Recordemos los números triangulares:

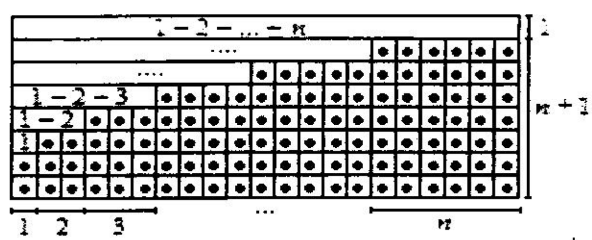


Si T_n denota al enésimo número triangular, tenemos: $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Por otra parte, es claro que todo número oblongo es el doble de un triangular:



Tenemos: $n(n+1) = 2T_n$, de donde se sigue que $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, la fórmula de Gauss[32].

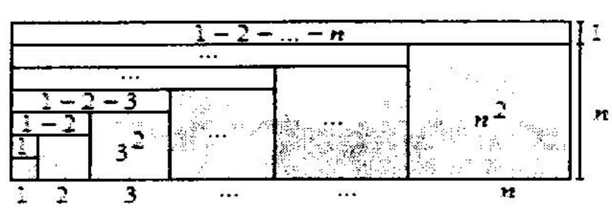
Observemos la siguiente figura:



Tenemos: Como $1 \cdot 2 = 2T_1$, $2 \cdot 3 = 2T_2, \ldots, n(n+1) = 2T_n$, resulta que $3(T_1 + T_2 + \cdots + T_n) = T_n \cdot (n+2)$, y

$$T_1 + T_2 + \cdots + T_n = \frac{n+2}{3} \cdot T_n = \frac{n+2}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Observemos la siguiente figura:



Tenemos: $(T_1 + T_2 + \ldots T_n) + (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = T_n \cdot (n+1)$. Combinando con el resultado anterior resulta que:

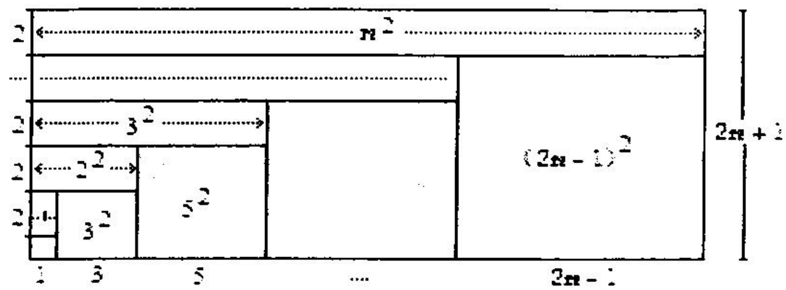
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)}{2}(n+1) - \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

[32] Esta fórmula merecía haber sido descubierta por los griegos, pero, hasta donde sabemos, estos notables matemáticos ¡no la vieron!, debiendo aguardar cerca de 2500 años para ser descubierta por Gauss, quién en su momento se apoyó en un argumento semi-visual.

y

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Observemos la siguiente figura:



Tenemos:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 + 2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = n^2 \cdot (2n+1)$$

Combinando con el resultado anterior concluimos que:

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 &= n^2 \cdot (2n+1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \\ &= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}. \end{aligned}$$

Estos ejemplos muestran cómo se combinan en la práctica lo visual y los deductivo, es decir, cómo en la matemática ninguno de estos elementos aparece aislado y en toda su pureza.

Referencias bibliográficas

BOURBAKI, NICOLAS,
1972 Elementos de historia de las matemáticas, Alianza Universidad, Madrid.

DEDEKIND, RICHARD.
1888 Essays on the Theory of Numbers, Dover Publications, Nueva York, 1963.

FALCÓN VEGA, JAIME ÓSCAR Y TORRES ALCARAZ, CARLOS,
1995 "To Show and to Prove", Studies in the Mexican Philosophy of Science, Boston Studies in the Philosophy of Science Volume 172, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, pp. 249–264.

Grabiner, Judith,
1974 "Is Mathematical Truth Time-Dependent?", New Directions in the Philosophy of Mathematics, Thomas Tymoczko (Editor), Birkhäuser, Boston, 1986.

Hadamard, Jacques,
1996 The Mathematician's Mind: The Psychology of Invention in the Mathematical Field, Princeton University Press, Princeton.

Kleiner, Israel y Movsovich-Hadar, Mitsa,
1997 "Proof: a Many-Splendored Thing", The Mathematical Intelligencer, Vol. 19, No. 3.

Lewis, C. S.,
1994 The Discarded Image: An Introduction to Medieval and Renaissance, Cambridge University Press, Cambridge.

Manin, Yuri,
1990 "Mathematics as Metaphor?", Proceedings of the International Congress of Mathematics, 1990, pp.1666-1671.

Torres, Carlos,
2004 "Axiomática formal y pruebas de existencia", Scientiarum, Año 1, vol. 1, no. 1 pp. 1-23.

Varghese, Roy Abraham, (editor),
2003 Great Thinkers On Great Questions, Element Books Ltd, Nueva York.