

TAUTOLOGÍAS

Sean α , β y γ fórmulas de un Lenguaje Formal de Primer Orden.

1. Reflexividad o Identidad

$$\alpha \leftrightarrow \alpha$$

2. Idempotencia

$$(\alpha \& \alpha) \leftrightarrow \alpha$$

$$(\alpha \vee \alpha) \leftrightarrow \alpha$$

3. Conmutatividad

$$(\alpha \& \beta) \leftrightarrow (\beta \& \alpha)$$

$$(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\beta \vee \alpha)$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \alpha)$$

4. Asociatividad

$$(\alpha \& (\beta \& \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \& \beta) \& \gamma)$$

$$(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$$

$$(\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma)$$

5. Transitividad

$$((\alpha \rightarrow \beta) \& (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$((\alpha \leftrightarrow \beta) \& (\beta \leftrightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \gamma)$$

6. Distributividad - Factorización

$$(\alpha \& (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \& \beta) \vee (\alpha \& \gamma))$$

$$(\alpha \vee (\beta \& \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \& (\alpha \vee \gamma))$$

$$(\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \vee (\alpha \rightarrow \gamma))$$

$$(\alpha \rightarrow (\beta \& \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \& (\alpha \rightarrow \gamma))$$

$$(\alpha \vee (\beta \rightarrow \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \vee \gamma))$$

$$(\alpha \& (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \& \beta) \rightarrow (\alpha \& \gamma))$$

7. Importación - Exportación

$$[\alpha \& (\beta \rightarrow \gamma)] \rightarrow [(\alpha \& \beta) \rightarrow \gamma]$$

$$[(\alpha \& \beta) \rightarrow \gamma] \leftrightarrow [\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)]$$

$$[(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma] \rightarrow [(\alpha \rightarrow \gamma) \vee (\beta \rightarrow \gamma)]$$

$$[(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma] \leftrightarrow [(\alpha \rightarrow \gamma) \& (\beta \rightarrow \gamma)]$$

$$[\alpha \& (\beta \rightarrow \gamma)] \rightarrow [\beta \rightarrow (\alpha \& \gamma)]$$

$$[\alpha \vee (\beta \rightarrow \gamma)] \leftrightarrow [\beta \rightarrow (\alpha \vee \gamma)]$$

8. Ley de No-Contradicción

$$\neg(\alpha \& \neg\alpha)$$

9. Tercero Excluido

$$\alpha \vee \neg\alpha$$

10. Doble Negación

$$(\neg(\neg\alpha)) \leftrightarrow \alpha$$

11. De Morgan o Dualidad

$$\neg(\alpha \& \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

$$\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \& \neg\beta)$$

12. Implicación Material

$$(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$$

$$\neg(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha \& \neg\beta)$$

13. Equivalencia Material

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow [(\alpha \rightarrow \beta) \& (\beta \rightarrow \alpha)] \quad \neg(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow [(\alpha \& \neg\beta) \vee (\neg\alpha \& \beta)]$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow [(\alpha \& \beta) \vee (\neg\alpha \& \neg\beta)] \quad (\neg\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow [(\alpha \vee \beta) \& \neg(\alpha \& \beta)]$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow [(\neg\alpha \vee \beta) \& (\alpha \vee \neg\beta)]$$

14. Contrapositiva

$$(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta)$$

15. Reducción al Absurdo

$$(\alpha \rightarrow (\gamma \& \neg\gamma)) \leftrightarrow (\neg\alpha)$$

$$((\alpha \& \neg\beta) \rightarrow (\gamma \& \neg\gamma)) \leftrightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

16. Consecuentia Mirabilis

$$(\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$$

$$(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

17. Contradicción o Trivialidad

$$\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$$

$$\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

$$(\alpha \ \& \ \neg\alpha) \rightarrow \beta$$

18. Absorción o Eliminación o Simplificación

$$[\alpha \ \& \ (\beta \vee \neg\beta)] \leftrightarrow \alpha$$

$$[\alpha \ \& \ (\beta \ \& \ \neg\beta)] \leftrightarrow (\beta \ \& \ \neg\beta)$$

$$[\alpha \ \& \ (\alpha \vee \beta)] \leftrightarrow \alpha$$

$$[\alpha \vee (\beta \vee \neg\beta)] \leftrightarrow (\beta \vee \neg\beta)$$

$$[\alpha \vee (\beta \ \& \ \neg\beta)] \leftrightarrow \alpha$$

$$[(\alpha \vee \beta) \ \& \ (\alpha \vee \neg\beta)] \leftrightarrow \alpha$$

$$[\alpha \vee (\alpha \ \& \ \beta)] \leftrightarrow \alpha$$

$$[(\alpha \ \& \ \beta) \vee (\alpha \ \& \ \neg\beta)] \leftrightarrow \alpha$$

19. Intercambio de Premisas

$$[\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)] \leftrightarrow [\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)]$$

20. Afimación del Antecedente

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

21. Expansión - Reducción

$$(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow [\alpha \leftrightarrow (\alpha \ \& \ \beta)]$$

$$(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow [(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \beta]$$

22. Ley del Sabueso

$$((\alpha \vee \beta) \ \& \ \neg\alpha) \rightarrow \beta$$

23. Modus Ponens

$$(\alpha \ \& \ (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta$$

Fórmulas cuya validez depende del uso de variables

Sean $x, y \in VAR_\rho$ y $\alpha, \beta \in FRM_\rho$.

$$1. \neg \forall x \alpha \leftrightarrow \exists x \neg \alpha$$

$$\neg \exists x \alpha \leftrightarrow \forall x \neg \alpha$$

$$\forall x \alpha \leftrightarrow \neg \exists x \neg \alpha$$

$$\exists x \alpha \leftrightarrow \neg \forall x \neg \alpha$$

$$2. \quad \forall x \alpha \leftrightarrow \alpha$$

$$\alpha \rightarrow \exists x \alpha$$

Si la variable x no ocurre en α :

$$\exists x \alpha \leftrightarrow \alpha$$

3. Si α es una ρ -fórmula en la cual la variable y no ocurre:

$$\forall x \alpha \leftrightarrow \forall y \alpha_y^x$$

$$\exists x \alpha \leftrightarrow \exists y \alpha_y^x$$

4. Factorización - Distribución.

$$\forall x[\alpha \ \& \ \beta] \leftrightarrow [\forall x \alpha \ \& \ \forall x \beta]$$

$$\exists x[\alpha \ \& \ \beta] \rightarrow [\exists x \alpha \ \& \ \exists x \beta]$$

$$[\forall x \alpha \ \vee \ \forall x \beta] \rightarrow \forall x[\alpha \ \vee \ \beta]$$

$$\exists x(\alpha \ \vee \ \beta) \leftrightarrow [\exists x \alpha \ \vee \ \exists x \beta]$$

$$\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow [\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta]$$

$$[\exists x \alpha \rightarrow \exists x \beta] \rightarrow \exists x(\alpha \rightarrow \beta)$$

$$\forall x(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow [\forall x \alpha \leftrightarrow \forall x \beta]$$

$$\exists x(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow [\exists x \alpha \leftrightarrow \exists x \beta]$$

5. Combinación $\forall - \exists$.

$$\forall x \alpha \rightarrow \exists x \alpha$$

$$[\forall x \alpha \ \& \ \exists x \beta] \rightarrow \exists x[\alpha \ \& \ \beta]$$

$$\forall x[\alpha \ \vee \ \beta] \rightarrow [\forall x \alpha \ \vee \ \exists x \beta]$$

$$\forall x[\alpha \rightarrow \beta] \rightarrow [\exists x \alpha \rightarrow \exists x \beta]$$

$$[\exists x \alpha \rightarrow \forall x \beta] \rightarrow \forall x[\alpha \rightarrow \beta]$$

$$\exists x[\alpha \rightarrow \beta] \leftrightarrow [\forall x \alpha \rightarrow \exists x \beta]$$

$$[\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta] \rightarrow \exists x[\alpha \rightarrow \beta]$$

$$\forall x[\alpha \leftrightarrow \beta] \rightarrow [\exists x \alpha \leftrightarrow \exists x \beta]$$

$$[\exists x \alpha \leftrightarrow \forall x \beta] \rightarrow \forall x[\alpha \leftrightarrow \beta]$$

6. Doble Cuantificación.

$$\forall x \forall x \alpha \leftrightarrow \forall x \alpha$$

$$\exists x \exists x \alpha \leftrightarrow \exists x \alpha$$

$$\forall x \forall y \alpha \leftrightarrow \forall y \forall x \alpha$$

$$\exists x \exists y \alpha \leftrightarrow \exists y \exists x \alpha$$

$$\exists x \forall y \alpha \rightarrow \forall y \exists x \alpha$$

7. Si x no ocurre en α :

$$\forall x[\alpha \ \vee \ \beta] \leftrightarrow [\alpha \ \vee \ \forall x \beta]$$

$$\forall x[\alpha \rightarrow \beta] \leftrightarrow [\alpha \rightarrow \forall x \beta]$$

$$\forall x[\beta \rightarrow \alpha] \leftrightarrow [\exists x \beta \rightarrow \alpha]$$

$$\exists x[\alpha \ \& \ \beta] \leftrightarrow [\alpha \ \& \ \exists x \beta]$$

$$\exists x[\alpha \rightarrow \beta] \leftrightarrow [\alpha \rightarrow \exists x \beta]$$

$$\exists x[\beta \rightarrow \alpha] \leftrightarrow [\forall x \beta \rightarrow \alpha]$$

8. Paradoja de Russell Generalizada.

$$\neg \exists x \forall y [\alpha(y, x) \leftrightarrow \neg \alpha(y, y)]$$

9. Principio del Borracho.

$$\exists x[\beta(x) \rightarrow \forall x \beta(x)]$$

10. $\forall x \alpha \rightarrow \alpha_\tau^x$

Donde τ es un término libre para x en $\alpha(x)$.

11. Igualdad

a). $\exists x [x \approx x]$

b). $\forall x [x \approx x]$

c). $\forall x \forall y [x \approx y \rightarrow y \approx x]$

d). $\forall x \forall y \forall z [(x \approx y \ \& \ y \approx z) \rightarrow x \approx z]$

e). $\forall x \forall y [x \approx y \rightarrow (\alpha(x,x) \rightarrow \alpha(x,y))]$

Donde $\alpha(x,x)$ es una ρ -fórmula en la cual la variable y no ocurre y $\alpha(x,y)$ es la ρ -fórmula que se obtiene de $\alpha(x,x)$ al cambiar **algunas** de las ocurrencias libres de x por y .