Lenguajes de Primer Orden

N.N.M

17 de febrero de 2013

Resumen

El siguiente material es para aclarar los asuntos del lenguaje.

La Lógica es la ciencia del razonamiento. La Lógica Matemática da al Razonamiento Matemático el arte y la ciencia de escribir bajo deducciones. Este volumen es sobre la *forma, significado, uso y limitaciones* de las deducciones lógicas, también llamadas pruebas. Mientras el usuario de ella practicará las diversas técnicas de prueba enfocándose en su aplicación en la práctica matemática cotidiana, el estudiante de la materia querrá también conocer la potencia y las limitaciones del aparato deductivo. Encontraremos que hay ciertas limitaciones propias en la búsqueda de la verdad por técnicas puramente formales, es decir, sintácticas.

1. Lenguajes de primer orden

En el modo de describirlo más abstracto (y por ello más simple) es una *teoría matemática formal* que abarca los siguientes conjuntos: Un conjunto de símbolos básicos o primitivos, $\mathcal{V}$, utilizados para construir *sucesiones de símbolos* (también llamadas expresiones o palabras) *sobre* $\mathcal{V}$. Un conjunto de expresiones, **Fbf** (Formulas bien formadas), *sobre* $\mathcal{V}$ llamadas las *fórmulas* de la teoría. Finalmente, un *subconjunto de* $\mathcal{V}$, llamado **Thm**, la colección de *teoremas* de la teoría.[1]

Pues bien, esta es la *extensión* de una teoría, esto es, el conjunto explícito de objetos en ella. Pero, ¿Cómo es una teoría "dada"?

En la mayoría de los casos de interés para el matemático, esta dada por $\mathcal{V}$ y dos tipos de *reglas simples*; reglas de construcción de fórmulas y reglas de construcción de teoremas. Las reglas del primer tipo nos permiten construr, o *generar*, **Fbf** *desde* $\mathcal{V}$. Las reglas del segundo tipo generan **Thm** desde **Fbf**. En pocas palabras, *una teoría consiste de un abecedario de símbolos primitivos*, *algunas "reglas" usadas para generar el "lenguaje de la teoría"* (*significado*, *esencia*, **Fbf**) *de esos símbolos*, *y algunas reglas "adicionales" usadas para generar los teoremas*. Sobre esto ampliamos a continuación:

Observación 1.1. ♢ ¿Qué es una regla? Corremos el riesgo de caer en la circularidad o en la pedantería si definimos de mas esta noción. Intuitivamente, las reglas que tenemos en mente son reglas de manipulación de "palabras", esto es, *cajas negras* (o funciones) que reciben entradas de "sucesiones" y responden con salidas de "cadenas". Por ejemplo, un teorema-pricipio

[1]Para mayor detalle ver p.38.

de construcción muy conocido recibe como entrada una fórmula y una variable, y devuelve, esencialmente, la *palabra* formada por el símbolo $\forall$ seguido de la variable y esta, a su vez , por la fórmula.[2] $\diamondsuit$

(1) En primera instancia, el *lenguaje formal (de primer orden)*[3] $\mathscr{L}$, donde se discute la teoría, es una terna **($\mathscr{V}$,TERM,Fbf)**, esto es, tiene tres componentes importantes, cada uno de los cuales es un conjunto.

 $\mathscr{V}$ es el "abecedario" o vocabulario del lenguaje. Es la colección de los "ladrillos" sintácticos básicos que usamos para formar *expresiones* que son *términos* (miembros de **TERM**) o *fórmulas* (miembros de **Fbf**). nos aseguraremos que los procesos que construyen términos o fórmulas, usando los labrillos de construcción básicos de $\mathscr{V}$, son intuitivamente algorítmicos o "mecánicos".
 Los términos codificarán formalmente "objetos", mientras que las fórmulas codificarán "proposiciones" acerca de esos objetos.

(2) El razonamiento en la teoría será el proceso del descubrimiento de *proposiciones verdaderas* sobre objetos, es decir, *teoremas*. Este viaje comienza con determinadas fórmulas que codifican proposiciones que damos por sentadas (i.e., aceptamos sin "demostrar" como verdades básicas). Tales fórmulas son los *axiomas*. Hay dos tipos de ellos:

 Axiomas *especiales* o *no lógicos*. Describen aspectos específicos de cualquier teoría específica que debamos construir. Por ejemplo, "$x+1 \neq 0$" es un axioma paricular que contribuye a la caracterización de la Teoría de Números en los números naturales, $\mathbb{N}$.
 El otro tipo de axiomas será común a *todas* las teorias. Es el tipo de cosas "universalmente válidas", no son exclusivas de una teoría específica (por ejemplo, "$x = x$" es una "verdad universal"). Por esa raazón este tipo de axioma será denominado *lógico*.

(3) Por último, necesitaremos *reglas* para el razonamiento, llamadas *reglas de inferencia*. Estas reglas son las que nos permitirán deducir, o derivar, una proposición verdadera a partir de otras que ya hemos establecido como verdaderas.[4] Tales reglas serán elegidas olvidando su significado, y preocupándonos tan solo por la forma. Ellas aplicarán a un enunciado "configuraciones" de ciertas *formas reconocibles* y producirán (derivarán) nuevas sentencias entre algunas *formas reconocibles correspondientes* (Remitase a la observación 1.1).

Observación 1.2. $\diamondsuit$ Podríamos pensar en esta diferenciación de los axiomas en tipo lógico o tipo ilógico como casos especiales de reglas, esto es, reglas que *no* reciben entradas con el fin de obtener un resultado. Des esta manera, el numeral (2) queda contenido en el numeral (3), y con ello somos leales a nuestra definición abstracta de teoría, donde no se mencionan los axiomas.

[2] Esta regla es conocida como "generalización".
[3] Pronto diremos que significa que un leguaje sea "de primer orden".
[4] El uso del término "verdadera" es para motivar. El concepto de "fórmula demostrable", "fórmula deducible", o "teorema" pronto será definido de manera precisa para reemplazar la expresión "proposición verdadera".

Un ejemplo, fuera del contexto matemático, de un *protocolo* de entrada es la orden invocada cuando se "teclea" **date** en el teclado del computador. Esta orden no recibe entrada, y muestra la fecha actual en la pantalla. $\diamondsuit$

Seguimos aproximándonos cuidadosamente a los lenguajes formales (de primer orden).

Hay dos partes en cada abecedario de primer orden. La primera es la colección de *símbolos lógicos* y *es común a todos los lenguajes de primer orden* sin importar la teoría de la cual trate. Describiremos esta parte a continuación.

Símbolos Lógicos

SL-1. *Variables objeto o individuales*. Una *variable objeto* es cualquier símbolo (único) de la sucesión infinita $v_0, v_1, v_2, \ldots$. En la *práctica* –cuando usamos la Lógica como herramienta o como objeto de estudio– relajamos la notación y usamos, *comúnmente*, $x, y, z, v, w, x', y', v', z_0, v_0$ como *nombres* de variables objeto.[5] Es solo un problema de notación. Nosotros permitiremos escribir, por ejemplo, "z" en lugar de "$v_{1200000000560000009}$". Las variables objeto (intuitivamente) "varían sobre" los abjetos de la teoría que se estudia (números, conjuntos, átomos, líneas, puntos, etc., según sea el caso).

SL-2. *Los conectivos Booleanos o proposicionales*. Estan los símbolos "$\neg$" y "$\vee$". [6] que se pronuncian *no* y *o*, respectivamente.

SL-3. *El cuantificador existencial*. Es el símbolo "$\exists$", que se conoce como *existe, para algún(a)*.

SL-4. *Paréntesis*. Ellos son "(" y ")".

SL-5. *La igualdad (Predicado de igualdad)*. Es el símbolo "=", que usamos para indicar que dos objetos son iguales y se pronuncia *igual a*.

$\diamondsuit$ Los símbolos lógicos tendrán una interpretación fija. En particular "=" siempre significará *igual a*. $\diamondsuit$

La parte teórico-específica del alfabeto no es fija, pues varía de teoría a teoría. Por ejemplo, en Teoría de Conjuntos sólo tenemos los símbolos no-lógicos (o especiales) $\in$ y **U**. El primero es un *símbolo predicativo* (o predicado) de *aridad* 2, mientras el segundo es un predicado de aridad 1.[7]

En teoría de números adoptamos los símbolos σ (significado: sucesor o función "$_1$"),$+$,$\times$. 0, $<$, y (algunas veces) un símbolo para la operación (función) exponenciación a^b. Los primeros tres son *símbolos funcionales* de aridades respectivas 1, 2 y 2. 0 es un *símbolo constante*, $<$ un predicado de aridad 2, y cual sea el símbolo que introduzcamos para a^b debe tener aridad 2.

La siguiente lista nos da un panorama general.

[5]Convenciones como esta son, en esencia, licencias –en la metateoría– para ser descuidado y salir impune. Aquí se dan por su facilitar el manejo.

[6]Los paréntesis no son parte del símbolo, sólo sirven para separar lo que si pertenece al símbolo y lo que no.

[7]"Aridad" es un término *hecho* por matemáticos. Se deriva de "ario" en "un*ario*", "bin*ario*", etc. Denota el número de argumentos necesarios por un símbolo para que este correctamente escrito (sintácticamente). Los símbolos de de predicado y funcionales necesitan argumentos.

Símbolos No-lógicos.

SNL-1. Un conjunto (posiblemente vacío) de simbolos *constantes*. Normalmente usaremos los metasímbolos[8] a,b,c,d,e, ya sea con o sin subíndices o apóstrofes, para representar constantes, amenos que tomemos en cuenta algunas notaciones formales alternativas, que sean de uso común para alguna teoría particular (ej, $\emptyset$, 0, ω).

SNL-2. Un conjunto (posiblemente vacío) de *símbolos de predicado o relacionales* para cada posible "aridad" $n > 0$. Normalmente usamos P, Q, R de forma genérica, para denotar símbolos de predicado. Observe que = está en el campo lógico. También observe que los símbolos formales de la teoría específica son posibles para predicados, e.g. $<,\in$.

SNL-3. Y, finalmente, un conjunto (posiblemente vacío) de *simbolos funcionales* para cada "aridad" posible $n > 0$. Usamos genericamente f, g, h, para denotar símbolos funcionales. Observe que los símbolos formales de la teoría específica son posibles para funciones, e.g. $+, \times$.

Observación 1.3. $\diamondsuit$ (1) Tenemos la opción de asumir que cada uno de los simbolos *lógicos* que hemos nombrado en **SL-1 a SL-5** no tienen mayor estructura ya que los simbolos son, ontológicamente, *idénticos a sus nombres*, esto es, ellos son exactamente los signos escritos en el papel (o en cualquier medio de impresión).

En este caso, cambiando los smbolos, digamos, $\neg$ y $\exists$ por $\sim$ y **E**, respectivamente, obtenemos una Lógica "diferente", pero que es, trivialmente, "isomorfa" a la que estamos describiendo: Cualquier cosa que podamos hacer o decir sobre una de ellas se traslada de forma trivial a una actividad equivalente, o expresión de, la otra con tan sólo cambiar todas las ocurrencias de $\neg$ por $\sim$ y de $\exists$ por **E** (o visceversa).

Un punto de vista alternativo es diferenciar entre los nombres de los símbolos (el símbolo mismo) y lo que nombran. Así, por ejemplo, "$\neg$" nombra al conectivo que llamamos **no**, pero no sabemos exactamente cual es la naturaleza de tal conectivo (sólo nos preocupamos de cómo se comporta). Entonces , el nombre "$\neg$" sólo es un tipográfico conveniente y puede ser reemplazado por otro signo que nombre al mismo objeto, **no**.

Esta manera de abordar nos da una flexibilidad para, por ejemplo, decidir como son "implementados" los símbolos de variables. A menudo es conveniente pensar que la secuencia entera de símbolos de variable fueron construidos con sólo dos símbolos, digamos, "v"y "$|$".[9] Un camino para ello es imaginando que v_i es el nombre para la sucesión de símbolos

$$v\underbrace{|\ldots|}_{i|'s}$$

[8]Los *meta*símbolos son símbolos *informales* (i.e. fuera del lenguaje formal) que usamos "a diario" dentro de la matemática "real" –la *meta*teoría– para describir el lenguaje formal.

[9]Queremos que estos símbolos sean idénticos a sus nombres. Así, no se podrá recurrir a argumentos filosóficos ni de cualquier tipo para perder claridad (tales como "v nombra a u, que realmente nombra a w, que de hecho es ...").

O, preferentemente –ver (2) abajo– v_i podría nombrar la sucesión de símbolos

$$v\underbrace{|\ldots|}_{i|'s}v$$

Independientemente de ello, v_i y v_j nombrarán objetos distintos si $i \neq j$.

Este *no* es el caso para *metavariables* (o nombres abreviados o informales) x,y,z,u,v,w. *A menos que explícitamente se diga otra cosa, x y y pueden nombrar a la misma variable formal, digamos* v_{131}.

Constantemente abusaremos de nuestro lenguaje y deliberadamente haremos uso indistinguido de los nombres y los símbolos que nombran. Diremos, por ejemplo "sea v_{1007} una variable objeto ..." en vez de "sea v_{1007} el nombre de una variable objeto ...", lo que parece favorecer la opción uno.

(2) *Cualesquiera dos símbolos* presentes en el alfabeto son *distintos*. Más aún, si ninguno de ellos es comstruido a partir de otros "subsímbolos más simples" –e.g.,$v_0,v_1,v_2,\ldots$ podrían *nombrar en realidad* a las expresiones $vv,v|v,v||v,\ldots$– entonces ninguno de ellas es una *subexpresión* de nunguna otra.[10]

(3) Un lenguaje formal, lo mismo que un lenguaje "natural" (como el Español, el griego o el Inglés), está vivo y evoluciona. El tipo de evolución particular que tenemos e mente es uno efectuado por las *definiciones formales*. Tales definiciones *agregan* constantemente símbolos no-lógicos al lenguaje.[11]

Así, cuando decimos, por ejemplo, " $\in$ y **U** son los únicos símbolos no lógicos de la Teoría de Conjuntos", estamos diciendo una pequeña mentira blanca.Con mayor presición tendríamos que decir que "$\in$ y **U** son los únicos símbolos lógicos 'primitivos"de la Teoría de Conjuntos", porque añadiremos una cantidad considerable de símbolos tales como $\cup,\omega,\emptyset,\subset,\subseteq$.

Esta evolución afecta el lenguaje formal del que se hable en *cualquier* teoría, no sólo en la Teoría de Conjuntos. $\diamondsuit$

$\diamondsuit\diamondsuit$ ¡Un momento! Sí la Teoría de Conjuntos formal es "el fundamento de toda la Matemática", y sí, como parece ser, este capítulo de Lógica nos ayuda a establecer a la misma Teoría de Conjuntos , entonces ¿Cómo es que estamos empleando *números naturales*, digamos 1200000000560000009 a modo de *subíndices* en los *nombres* de las variables objeto? ¿Cómo es que está permitido támbien hablar sobre "conjuntos de símbolos" cuando lo que buscamos es establecer la Teoría de Comjutos formalmente? Sin duda aún no "tenemos"[12] ninguno de esos "elementos" ¿O si?

En primer lugar, la presencia de subíndices como 1200000000560000009

[10] ¡Lo que hemos dicho en (2) son *requerimientos*, no metateoremas! Es decir, no son del tipo de cosas que podamos *demostrar* sobre nuestro lenguaje formal dentro de la matemática cotidiana.

[11] Mas adelante se estudia este fenómeno a detalle. Por cierto, sólo podemos agregar símbolos a laparte no lógica del abecedario. Todos los símbolos lógicos han sido dados de una vez y para siempre.

[12] "No tenemos" en el sentido de no haberlas formalmente definidos o demostrado su existencia, o ambos.

en

$$v_{1200000000560000009}$$

no es problema. Una forma de interpretar lo que se dijo en la definición es ver a los v_i como los nombres abreviados del objeto real, este es la expresión que emplea los símbolos v y $|$ como en la observación anterior. En este sentido decimos que v_i esta "implementada" como

$$v \underbrace{|\ldots|}_{i|'s} v$$

especialmente el uso de $'i'$ arriba es tan solo ilustrativo, y así totalmente superfluo. Podemos decir, en cambio, que las expresiones como la anterior *son* las variables que definimos a continuación *sin* la ayuda del "número natural i":

Un "|-cálculo" forma una expresión como esta: Escribe una "|".[13] Esta es la "expresión actual". Repitelo un número finito de veces: Agrega (i.e. concatena) *una* | inmediatamente a la derecha de la expresión actual. Escribe esta nueva expresión (ahora es *la* expresión actual).

Llamaremos a toda expresión que figure en algún |-cálculo una "|-expresión". Una variable o bien *es* la expresión vv, o bien es obtenida como la concatenación, de izquierda a derecha, de v seguida por una |-expresión, seguida por v.

Todo lo que ahora nos hace falta es la posibilidad de generar tantas variables distintas como sean necesarias (esta parte corresponde a la de "sucesión sin final" de la definición, p. 6): Para cualesquiera dos variables obtenemos *una* nueva y diferente de ambas formando la expresión "v , seguida por la concatenación de lasa dos |-partes, seguida por v". Similarmente si tenemos tres, cuatro,... variables. De esta manera, dos expresiones de | son diferentes sii[14] ambas ocurren en el mismo |-cálculo, y uno, más no ambos, como la última (sub)expresión.

Otra forma, más directa, de interpretar lo que fue dicho acerca de variables objeto en la definición es tomarla literalmente, esto es, suponer que habla acerca del carácter ontológico de las variables.[15] A saber, el subíndice es solo una expresión de símbolos carentes de significado tomadas de la siguente lista:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Podemos pretender otra vez no conocer a números naturales (nadie ha tenido la decencia de presentármelos), y cuando, e.g., queremos una variable distinta de v_{123} o de v_{321}, podemos tomar o bien a v_{123321} o a v_{321123} como una *nueva* variable.

[13] Sin las comillas. Fueron puestas para expluir la coma posterior del símbolo.

[14] Si y sólo si

[15] ¿Porqué no sólo decir *exactamente* lo que una definicón quiere decir en vez de dejarla abierta a interpretación? Se puede dejar perfectamente claro el carácte ontológico de las variables en la definición, como en [**?**]. En vez de eso, seguiremos la costumbre reciente y daremos las definiciones de una manera inacabada y dejamos el carácter ontológico de las variables como materia de especulación. Esto nos da una excusa para escribir pies de página como este u observaciones como 1.3.

O.K. Así *no* usamos números naturales en la definición. Pero dijimos "conjuntos" y "sucesión sin final", lo cual implica la presencia de *conjuntos infinitos*.

Como ya habremos notado, por un lado tenemos la "Matemática Real", y por el otro *réplicas sintácticas* de teorías –las teorías formales– que hemos construido *dentro de la Matemática Real*. Teniendo una teoría formal construida, podemos elegir *usarla* (actuando cono formalistas) para generar teoremas, siendo estos codificados como sucesiones de símbolos (fórmulas). Así, la afirmación "la Teoría Axiomática de Conjuntos es el fundamento de toda Matemática" es un coloquialismo proferido desde la metateoría y quiere decir "dentro de la Teoría axiomática de Conjuntos podemos construir los conjuntos conocidos de la Matemática, tales como los números reales $\mathbb{R}$ y los números complejos $\mathbb{C}$, y además podemos simular lo que informalmente hacemos cuando estamos trabajando en el Análisis real o complejo, el Álgebra, la Topología, la Teoría de la Medida y la Integración, Análisis Funcional, etc. etc.".

No hay circularidad en esto, sino una observación empírica un tanto jactanciosa *en la metateoría* de lo que nuestro simulador puede hacer. Además, nuestra metateoría tiene conjuntos y toda suerte de otros objetos matemáticos. En principio podemos utilizar cualquiera de entre aquellas construcciones o discutir el simulador, la teoría formal.

Así, la cuestión no esta en si podemos usar conjuntos, o números naturales, en nuestras definiciones, pero si se aplican restricciones. Por ejemplo, ¿Podemos usar conjuntos infinitos?

Si fueramos Platonistas, tendríamos disponible en la metateoría todo tipo de conjuntos, incluso los conjuntos infinitos, en particular el conjunto de todos los números naturales. Podemos usar cualquiera de estos elementos, hablar sobre ellos, etc., como lo deseemos, cuando etamos describiendo o construyendo la teoría formal *desde nuestra metateoría*.

Ahora que si no fueramos Platonistas, entonces nuestro mundo matemático "real" es mucho mas restringido. En extremo, *no* tenemos conjuntos infinitos.[16]

Aún podemos llegar a definir nuestro lenguaje formal. Despues de todo, la sucesión "sin fin" de variables objeto $v_o, v_1, v_2, \ldots$ puede ser *finitamente generado* en dos maneras al menos, como ya hemos visto. De esta forma podemos explicar (a un verdadero formalista o finitista) que una "sucesión sin fin" fue un desafortunado *lapsus linguae*, pues lo que realmente queriamos era dar un *procedimiento* para generar "sobre pedido" una *nueva variable*, distinta de cualesquiera que ya pudiesemos tener.

Dos comentarios finales el respecto: El primero, hemos sido un poco selectivo al hacer uso del término "metavariable". Hemos llamado a x, x', y metavariables, pero hemos hecho implícito que las "v_i" son variables formales, tanto si son sólo *nombres* u objetos formales a los que no conocemos o no nos importa como lo que parezca. Bien, siendo estrictos al hablar, las abreviaturas v_i son tambien metavariables, pero dotados con una propiedad que las metavariables "genéricas", como x, y, z', no tienen: Nombres distintos v_i

[16]Un finitista te permite utilizar tantos enteros como sean necesarios, mientras sean una *cantidad finita*. Si preguntas por mas, puedes tener mas, pero nunca el conjunto de todos los números enteros ni algún subconjunto infinito de él.

denotan variables objeto distintas (cf. observación 1.3).

El segundo, demos debemos aclarar que una teoría formal, cuando se utiliza (i.e. cuando el simulador se "echa a andar") es una *generador* de expresiones, *no* toma desiciones, ni "analiza". Esto es, puede *generar* cualquiera de las siguientes: variables (si estas están dadas por procedimientos), fórmulas y términos (por definir), o teoremas (tambien por definir). Loa *problemas de desición*, sin importar cuán triviales sean, no son posibles resolver, pues el sistema no esta construido para manejarlos. Ellos pertenecen a la metateoría. En particular, la teoría no distingue que números o expresiones (como 12005) pueden estar ocultos en el nombre de una variable (como v_{12005}).

Ejemplos de problemas de desición: ¿Qué es esta expresión, un término, una fórmula o una variable? Este tipo de preguntas son "sencillas": Son decidibles en la metateoría de forma algorítmica. O bien ¿Esta fórmula es un teorema? Esta no es decidible de manera algorítmica en la metateoría si se trata de la Aritmética de Peano o la Teoría de Conjuntos. $\diamondsuit\diamondsuit$

Definición 1.1. (Terminología acerca de expresiones). Una sucesión de símbolos, o *expresión* formada solamente usando los símbolos presentes en un conjunto M dado[17] es llamada *una expresión sobre el conjunto, o alfabeto, M*.

Si A y B denotan expresiones (digamos sobre M), entonces el símbolo $A*B$ o simplemente AB, denota la sucesión de símbolos obtenida al listar de izquierda a derecha primero primero los símbolos de A, seguidos inmediatamente por los símbolos de B. Decimos que AB es (mejor dicho, denota o nombra) la *concatenación* de las expresiones A y B, en ese orden.

Denotamos el hecho que dos expresiones (llamadas) C y D son *sucesiones idénticas* (pero sólo diremos que son *iguales*) como $C \equiv D$. La negación de lo anterior la denotaremos por $C \not\equiv D$. Así, si $\sharp$ y ? son (y queremos decir que "son") símbolos de un alfabeto, entonces

$$\sharp ?? \equiv \sharp ?? \qquad \text{pero} \qquad \sharp ? \not\equiv \sharp ??$$

Podemos emplear $\equiv$ en un contexto como "sea $A \equiv \sharp\sharp ?$", cuando le damos el nombre A a la expresión $\sharp\sharp ?$.[18]

$\diamondsuit$ A lo largo de este libro el símbolo $\equiv$ será *usado en la metateoría* para la igualdad de expresiones sobre algún conjunto M. $\diamondsuit$

El símbolo λ normalmente denotará la *expresón vacía*, y para él postulamos su manera de funcionar para cualquier expresión A:

$$A \equiv A\lambda \equiv \lambda A \qquad \text{para cualquier expresión } A$$

Decimos que A *ocurre en B, o es una subexpresión de B*, sii hay expresiones C y D tales que $B \equiv CAD$.

Por ejemplo, "(" ocurre cuatro veces en la expresión (explícita) "$\neg()\vee)(($", *en las posiciones* 2,3,7,8. Cada vez que esto pasa, tenemos *una ocurrencia* de "(" en "$\neg()\vee)(($".

[17]Un conjunto que proveé símbolos para construir expresiones no tiene nada de especial, essólo un conjunto. Sin embargo, tiene un nombre:"abecedario" o "alfabeto".

[18]Signos de puntuación como "." no son parte de la expresión. Para evitar este tipo de aclaraciones uno delimita las expresiones usando paréntesis. Por ejemplo, Si A representa la expresión $\sharp$, escribimos $A \equiv$ "$\sharp''$. No debemos escribir "A'', a menos que querramos escribir a una expresión cuyo único símbolo es A.

Si $C \equiv \lambda$, decimos que A *es un prefijo de* B. Aún más, y si $D \not\equiv \lambda$, decimos entonces que A *es un prefijo propio de* B.

Definición 1.2. Términos. El conjunto de *términos*, **TERM**, es el *menor* conjunto de expresiones sobre el alfabeto $\mathcal{V}$ con las siguientes propiedades:

(1) Todos los elementos en **SL-1** o en **SNL-1**($x, y, z, a, b, c,$ etc.) están presentes en $\mathcal{V}$.

(2) Si f es una función[19] de aridad n y $t_1, t_2, ..., t_n$ son elementos de $\mathcal{V}$, también lo es la expresión "$ft_1t_2...t_n$".

Los símbolos t, s y u con o sin subíndices o apóstrofes, denotarán términos arbitrarios. Como los estamos usando en el *metalenguaje* para "variar sobre" los términos, naturalmente les llamaremos metavariables. Tambien sirven –como variables– para la definición de la *sintaxis* de términos. Por esta razón son llamados tambien *variables sintácticas*.

Observación 1.4. $\diamondsuit$ (1) Muchas veces haremos abuso de notación y escribiremos $f(t_1, ..., t_n)$ en vez de $ft_1...t_n$.

(2) La definición 1.2 es una *definición inductiva*.[20] Ella define terminos mas o menos "complicados" asumiendo que ya conocemos los términos más simples ya vistos. Esta es una técnica estándar empleada en la Matemática Real. Tendremos oportunidad de decir algo más sobre las definiciones inductivas –y su conveniencia– en un $\diamondsuit\diamondsuit$-comentario posterior.

(3) Aclarararemos esta particular forma de definir términos a nuestra definición operante de una teoría (Dada inmediatamente antes de la observación 1.1, en términos de "Reglas de Formación"). El numeral (2) en la definición anterior dice, esencialmente, que podemos construir nuevos términos (a partir de otros) aplicando la siguiente *regla general*: Elige un símbolo funcional arbitrario, digamos f. Este tiene una regla de formación específica asociada con la que, para un apropiado número n, de una lista ordenada de términos ya existentes, $t_1, ..., t_n$, construiremos un nuevo término que consiste de f, seguido inmediatamente por la lista ordenada de términos dados.

Para ser específicos, supongamos que estamos trabajando en el lenguaje de la teoría de números. Hay un símbolo funcional disponible, $+$. La regla asociada a $+$ construye el término nuevo $+ts$ para cualesquiera términos obtenidos antes, t y s. Por ejemplo, $+v_1v_{13}$ y $+v_{121}+v_1v_{13}$ son términos bien formados. Normalmente escribimos tales términos en notación "infija",[21] i.e., $t+s$, v_1+v_{13} y $v_{121}+(v_1+v_{13})$ (observe la inclusión de paréntesis, para indicar la secuencia de aplicación de $+$).

Un subproducto de lo que acabamos de describir es que *la aridad de un símbolo funcional es la cantidad de términos que la regla asociada requiera como entradas*.

(4) Una frase crucial empleada en la definición anterior (que aparece en todas las definiciones inductivas) es *el menor*, y se aplica como en Teoría de Conjuntos en el sentido de la "contención". Por ejemplo, podemos facilmente

[19] A veces diremos función en vez de símbolo funcional, constante en vez de símbolo constante y predicado o relación en vez de símbolo predicativo.

[20] Algunos matemáticos instisten en que las definiciones son *recursivas* y que las demostraciones son "inductivas".

[21] El símbolo funcional es ubicado enmedio de los argumentos.

pensar en un conjunto de expresiones que satiisfagan ambas condiciones en la definición anterior, pero que *no* sea el "menor", en virtud de presentar elementos adicionales, tales como la expresión "¬¬(".

Meditación 1.1. *Porqué "¬¬(" no está en el menor conjunto de la definición, y por ello no es un término?*

El lector puede desear pensar aún más la cuestión, considere un ejemplo familiar, el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$. El principio de inducción en $\mathbb{N}$ asegura la existencia de un conjunto que es *el menor* con las propiedades:

(i) 0 está incluido, y
(ii) si n esta incluido, también lo está $n+1$.

En contraste, los conjuntos $\mathbb{Z}$ (Enteros), $\mathbb{Q}$ (Racionales), $\mathbb{R}$ (Reales), también satisfacen (i) y (ii), pero claramente ninguno es "el menor". $\diamondsuit$

Definición 1.3. (Fórmulas Atómicas). El conjunto de *frmulas atómicas*, **Fa**, es aquel que consiste precisamente de:

(1) las expresiones $t = s$ para cualquier elección de términos t, s.

(2) Las expresiones $Pt_1...t_n$ para todas la elecciones posibles de símbolos de predicado n-arios (y para cualquier $n > 0$) y para todas las posibles elecciones de términos $t_1, ...t_n$.

$\diamondsuit$ A menudo cometemos abusos de notación y escribiremos $P(t_1, ..., t_n)$ en vez de $Pt_1...t_n$. $\diamondsuit$

Definición 1.4. (Fórmulas bien formadas). El conjunto de *fórmulas bien formadas*, **Fbf**, es *el menor* conjunto de expresiones sobre un alfabeto $\mathcal{V}$ con las siguientes propiedades:

(a) Todos los elementos de **Fa** están incluidos.

(b) Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ denotan expresiones (sobre $\mathcal{V}$) que están incluidas, también lo están $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ y $(\neg\mathscr{A})$.

(c) Si $\mathscr{A}$ denota una expresión que está incluida y x es una variable objeto (*que puede o no ocurrir en* $\mathscr{A}$ (como subexpresión)), entonces la ezpresión $((\exists x)\mathscr{A})$ también lo está, y decimos que $\mathscr{A}$ es la *amplitud (instancia o ámbito)* de $(\exists x)$

Observación 1.5. $\diamondsuit$

(1) La definición anterior es nuevamente inductiva. Su enunciado (*en el metalenguaje*) se facilita con el uso de las también llamadas metavariables o *variables sintácticas*- $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$- usadas como *nombres* para fórmulas *arbitrarias* (indeterminadas). En general, usaremos letras mayúsculas caligráficas $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E}, \mathscr{F}, \mathscr{G}$ (con o sin sibíndices o apóstrofes), excepto las últimas letras del abecedario, para llamar a las fórmulas bien formadas, o *fórmulas*, como las hemos llamado. La definición de **Fbf** dada es la corriente. En particular, permite fórmulas bien formadas como $((\exists x)((\exists x)x = 0))$ en interés de hacer las reglas de formación " libre del contexto".[22]

[22] En algunas exposiciones, la regla de formación de la definición 1.4(c) es "sensible al contexto": requiere que x *no* este cuantificada en $\mathscr{A}$.

(2) Las reglas sintácticas recién dadas no nos permiten escribir cosas como $\exists f$ o $\exists P$, donde f y P son símbolos, el primero funcional y el otro de predicado. Esta cuantificación está restringida deliberadamente para actuar solamente en variables objeto, y hace del lenguaje uno de *primer orden*.

(3) Ya hemos indicado en la observación 1.4 de donde provienen las aridades, ya sea de símbolos funcionales o predicativos (las definiciones 1.2 y 1.3 se refieren a ello). Hay números que están implícitos ("cableados") con las reglas de formación de términos y fórmulas atómicas. Cada símbolo funcional y cada símbolo de predicado (e.g. $+, \times, \in, <$) tiene su propia regla única de fromación. Esta "sabe" cuantos términos, en orden, son necesarios (como entrada) para formar un término o una fórmula atómica. Por tanto, de la teoría, *en uso*, aplica más que el estudio de sus reglas de formación, y es, en particular, ignorante de aridades de símbolos.

Ya que este punto jurisdiccional ha sido hecho (cf. la observación final sobre cuestiones de desición, en páginas anteriores), podemos considerar una forma alternativa de conocer las aridades de los símbolos (en la *metateoría*): en vez de incrustar las aridades en las reglas de formación, podemos "disimularlos" o esconderlos en el carácter ontológico de los símbolos, no haciendolos explícitos en el nombre.

Por ejemplo, un nuevo símbolo, digamos $*$, puede ser usado para consignar la aridad. Esto es, podemos pensar un símbolo funcional o predicativo como consistente de dos partes; una parte de aridad y la parte de "todo el resto"(lo cual hace al símbolo único),[23] esta última necesaria para lograr un único símbolo. Por ejemplo, $\in$ puede ser , en realidad, el nombre del símbolo "$\in^{**}$", donde este último nombre es idéntico al símbolo que denota, o en forma coloquial "lo que ves es lo que es" - vea los numerales (1) y (2) de la observación anterior-. La presencia de los dos asteriscos indica la aridad. Algunos ven esto de manera un tanto distinta: Hacen posible en la metateoría una "función" ar, del "conjunto de todos los símbolos funcionales , mas los predicativos" (de un lenguaje dado) a los números naturales, de manera que para cualquier símbolo funcional f o símbolos de predicado P, $ar(f)$ y $ar(P)$ nos da la aridad de f y P, respectivamente.[24]

(4) *Abreviaturas*

Abr. 1 La expresión $((\forall x)\mathscr{A})$ abrevia la expresión "$(\neg(\exists x)(\neg\mathscr{A}$". Así, para cualquier fórmula escrita explícitamente $\mathscr{A}$, la notación inicial es informal (metamatemática), mientras que la último es formal (dentro del lenguaje formal). En particular, $\forall$ es un símbolo metalingüístico. "$\forall x$" es el *cuantificador universal*. $\mathscr{A}$ es su ámbito. El símbolo $\forall$ se pronuncia *para todo*.

Introducimos además –en el metalenguaje– un número de conectivos booleanos adicionales para abreviar ciertas expresiones:

[23]El lector quizá quiera pasar a la p. 166 para ver una posible implementación en la teoría de números.

[24]Para los matemáticos una función puede verse como un conjunto de parejas entrada-respuesta. Uno puede pegar las dos partes, como en "$\in_{**}$" –donde "$\in$" es la entrada y "$**$" es la salida, este último denotando "2"– etc. Es así que los dos enfoques son equivalentes.

Abr. 2 *(Conjunción, $\wedge$)* $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ abrevia $(\neg((\neg\mathscr{A}) \vee (\neg\mathscr{B})))$. El símbolo $\wedge$ se pronuncia *y*.

Abr. 3 *(Implicación material o clásica, $\rightarrow$)* $(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$ abrevia $((\neg\mathscr{A}) \vee \mathscr{B})$. $(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$ se pronuncia *si $\mathscr{A}$, entonces $\mathscr{B}$*.

Abr. 4 *(Equivalencia, $\leftrightarrow$)* $(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$ abrevia $((\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \wedge (\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A}))$.

Abr. 5 Con objeto de minimizar el uso de paréntesis en la metanotación adoptaremos una *jerarquía de conectivos*: $\forall, \exists, \neg$ tienen la prioridad, y despues (por orden descendente de prioridad) $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ y acordamos no hacer uso de los paréntesis externos (el primero y el último). Todas las *asociatividades* son *derechas*, esto es, al escribir $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C}$, en realidad estamos escribiendo en forma algo descuidada la expresión $(\mathscr{A} \rightarrow (\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C}))$.

(5) El lenguaje así definido, $\mathscr{L}$, es *de especie única*, es decir, tiene una sola *especie o tipo* de variable objeto. ¿No es esto incoveniente? Después de todo, nuestra Teoría de Conjuntos (el Volumen 2 aborda el tema) tendrá ambos *átomos y conjuntos*. En otras teorías, como la geometría, uno tiene puntos, líneas y planos. Uno hubiese deseado tener diferentes "tipos" de variables, uno para cada cual.

En realidad, hacer esto acarrearía una innecesaria complicación de la sintaxis. Podemos (y lo haremos) proseguir con sólo *un tipo* de variables abjeto. Por ejemplo, en la Teoría de Conjuntos también presentaremos un predicado 1-ario,[25] **U**, que se encarga de "verificar" las propiedad de "ser conjunto" en los objetos.[26] Formas similares de evasión son posibles en otras teorías. Por ejemplo, la Geometría se manipula con un tipo de variable y predicados unarios "(ser) punto", "(ser) línea", y "(ser) plano".

Hablando del lenguje, algunos autores acentuan la importancia de los símbolos no lógicos, dando al mismo tiempo las reglas de formación por sentado; entonces ellos dicen que tenemos un *lenguaje*, digamos, "$\mathscr{L} = \{\in, \mathbf{U}\}$" en lugar de "$\mathscr{L} =< \mathscr{V}, \mathbf{TERM}, \mathbf{Fbf} >$ donde $\mathscr{V}$ tiene $\in$ y **U** como sus únicos símbolos no lógicos". Precisando, ellos usan "lenguaje" para la parte no lógica del alfabeto. $\diamondsuit$

Una variable que esta cuantificada *es acotada en el ámbito del cuantificador*. A variables sin cuantificar son *libres*. A continuación daremos, por inducción sobre las fórmulas, definiciones (metamatemáticas) precisas de "libre" y "acotada".

Definición 1.5. Variables libres y variables acotadas. Una variable objeto *x ocurre libre* en un término t o fórmula atómica $\mathscr{A}$ sii ella ocurre en t o aparece en $\mathscr{A}$ como subexpresión (ver definición 1.1).

x ocurre libre en $(\neg\mathscr{A})$ sii ocurre libre en $\mathscr{A}$.

x ocurre libre en $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ sii ocurre libre en alguuna, es decir, en $\mathscr{A}$ o en $\mathscr{B}$.

[25] Comúnmente llamado *unario*.

[26] Original; whose job is to test an object for "sethood". Palabra creada por la gente del área.

x ocurre libre en $((\exists y)\mathscr{A})$ sii x ocurre libre en $\mathscr{A}$, y y es una variable *distinta* de x.[27]

La variable y en $((\exists y)\mathscr{A})$ *no* es, desde luego, libre –aunque pueda serlo en $\mathscr{A}$– como acabamos de concluir en esta definición inductiva. Decimos que ella, (y), *es acotada* en $((\exists y)\mathscr{A})$. Evidentemente, términos y fórmulas atómicas no tienen variables acotadas.

Observación 1.6. $\diamondsuit$ **(1)** Por supuesto, la definición 1.5 se ocupa de los conectivos definidos, via el procedimiento obvio de traducción.

(2) *Notación.* Si $\mathscr{A}$ es una fórmula, a menudo escribiremos $\mathscr{A}[y_1,...,y_k]$ para indicar nuestro interés en las variables $y_1,...,y_k$, que pueden o no ocurrir libres en $\mathscr{A}$. Es más, es posible que haya otras variables libres en $\mathscr{A}$ que podríamos decidir no incluir en esa lista.

Por otra parte, si usamos paréntesis , como en $\mathscr{A}(y_1,...y_k)$, estamos implícitamente afirmando que $y_1,...y_k$ es la *lista completa* de variables libres que aparecen (ocurren) en $\mathscr{A}$. $\diamondsuit$

Definición 1.6. Un término o fórmula es *cerrada* sii no ocurren variables libres en ella. Una fórmula cerrada es llamada un *enunciado*.

Una fórmula es *abierta* sii no “aparecen” cuantificadores en ella (de esta manera una fórmula puede ser abierta y cerrada a la vez).

[27] Hay que recordar que y y y son abrevaciones de nombres como $v_{1200098}$ y v_{11009} (que nombran a variables distintas). Sin embargo, podría ser que x y y nombren a la misma variable. Por tanto, no es redundante decir “y y es una variable *distinta* de x”. Por cierto, esto se abrevia como $x \not\equiv y$, en virtud de la definición 1.1