Relacionales

En estas notas estudiaremos algunas *características* de una relacional R respecto a una clase A, las cuales nos permitirá establecer los conceptos clásicos de orden parcial, orden total, buen orden, entre otros.

Tradicionalmente las siguientes definiciones se dan con una condición muy fuerte; $CMP(R) \subseteq A$ (o equivalentemente $R \subseteq A \times A$). Sin embargo, nosotros no tomaremos tal restricción.

Notación.

$$\begin{array}{rcl} aRb & \rightleftharpoons & \langle a,b\rangle \in R. \\ a\not R b & \rightleftharpoons & \langle a,b\rangle \notin R. \\ R\restriction_A & = & R\cap(A\times A). \end{array}$$

Relacionales reflexivas sobre A.

Definición 1. Una relacional R es *reflexiva sobre A* si y sólo si $\forall x\in A\,(xRx)$, o bien:

$$\forall x\,(x\in A \longrightarrow xRx).$$

Id_A es el ejemplo clásico de relacional reflexiva sobre A, como también lo es $A\times A$. La relación $\leq$ es reflexiva sobre $\mathbb{N}$ (o $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, según sea el caso). También podemos hablar de la relación de divisibilidad, $|$, sobre $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$.

Además, Si R,S son relacionales, $R\subseteq S$ y R es reflexiva sobre A, se tiene que S es reflexiva sobre A. Si además $B\subseteq A$, R es reflexiva sobre B[1]. Sin embargo, que una relacional sea reflexiva sobre una clase no implica que lo sea sobre las supraclases de ésta.

Ejemplo. La relación $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle\}$ es reflexiva sobre $\{1,2\}$, pero **no** es reflexiva sobre $\{1,2,3\}$.

Además, $S:=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}\subseteq R$, pero S **no** es reflexiva sobre $\{1,2\}$, pues $2\not S 2$.

A continuación enunciamos el criterio para ver que una relacional es reflexiva sobre una clase.

[1]Esto se resume diciendo que la reflexividad sobre una clase se hereda a suprarrelaciones y que una relación que es reflexiva sobre una clase también lo es sobre las subclases se ésta última.

Teorema 1. Sea R una relacional y A una clase. Las siguientes proposiciones son equivalentes.

i. R es reflexiva sobre A.

ii. R^{-1} es reflexiva sobre A.

iii. $Id_A \subseteq R$.

iv. $Id_A \subseteq R^{-1}$.

A partir de este resultado, es inmediato que cualquier relacional es reflexiva sobre $\emptyset$. En contraparte, si $\emptyset$ es una relacional reflexiva sobre B, entonces $B = \emptyset$.

Teorema 2. Cerradura reflexiva. Sean R, S relacionales y A una clase.

- $\mathscr{CR}(R) := R \cup Id_A$ es una relacional reflexiva sobre A.
- Si S es una relacional reflexiva sobre A y $R \subseteq S$, $\mathscr{CR}(R) \subseteq S$.

Es decir, $\mathscr{CR}(R)$[2] es la $\subseteq$–menor relacional reflexiva sobre A que contiene a R.

Teorema. Sea R una relacional y A una clase.

$$\mathscr{CR}(R) \in \mathscr{V} \iff R \in \mathscr{V} \ \& \ A \in \mathscr{V}.$$

Proposición 1. Sea $a \in \mathscr{V}$ y $R \subseteq a \times a$ una relacional[3]. Definamos la clase X como

$$X := \{\mathbf{s} : \mathbf{s} \text{ es relación reflexiva sobre } a \ \ \& \ \ R \subseteq \mathbf{s}.\}$$

Se tienen las siguientes afirmaciones:

† $\bigcap X \in \mathscr{V}$.

† $R \subseteq \bigcap X$.

† $\bigcap X$ es una relación reflexiva sobre a.

†† $\mathscr{CR}(R) = \bigcap X$.

Demostración. $a \times a \in X \implies \bigcap X \in \mathscr{V}$. Para toda $\mathbf{s} \in X$, se tiene que $R \subseteq \mathbf{s}$ y (como $\mathbf{s}$ es reflexiva sobre A) $Id_A \subseteq \mathbf{s} \implies R \subseteq \bigcap X \ \& \ Id_A \subseteq \bigcap X$.
Por el teorema **2** y los dos incisos anteriores se sigue que $\mathscr{CR}(R) \subseteq \bigcap X$.
$\mathscr{CR}(R) \in X \implies \bigcap X \subseteq \mathscr{CR}(R)$.

■

[2]Más ún, resulta ser única, por lo que la llamamos *la cerradura (o clausura) reflexiva de R sobre A* o bien *la relacional reflexiva sobre A generada por R*.

[3]¿Porqué R es conjunto?

Relacionales irreflexivas sobre A.

Definición 2. Decimos que una relacional R es *irreflexiva sobre* A[4] si y sólo si $\forall x \in A\,(x \not R x)$, o bien
$$\forall x\,(x \in A \longrightarrow x \not R x).$$

Los ejemplos comúnes son las relaciones $<$, $>$ sobre $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, o $\mathbb{R}$, según sea el caso). Por otra parte, $\mid$ no es irreflexiva sobre $\mathbb{N}$ ni sobre $\mathbb{Z}$. Una gráfica o grafo, tal como se entiende en Teoría de Gráficas, es muestra de una relación, la adyacencia, irreflexiva sobre un conjunto (los puntos de la gráfica).

Además, Si R, S son relacionales, $R \subseteq S$ y S es irreflexiva sobre A, se tiene que R es irreflexiva sobre A. Si además $B \subseteq A$, S es irreflexiva sobre B[5]. Por otro lado, que una relacional sea irreflexiva sobre una clase no implica que lo sea sobre las supraclases de ésta.

Ejemplo. En $A = \{1,2,3\}$ tenemos que:

- $R := \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$ es irreflexiva sobre A, pero $R \subseteq S := \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 1,1\rangle\}$ **no** es irreflexiva sobre A.
- S es irreflexiva sobre $\{2,3\}$, aunque **no lo es** sobre A.

Teorema 3. Sea R una relacional y A una clase. Son equivalentes:

i. R es irreflexiva sobre A.

ii. R^{-1} es irreflexiva sobre A.

iii. $R \cap Id_A = \emptyset$ (o bien $R^{-1} \cap Id_A = \emptyset$).

Observaciones. $\emptyset$ es irreflexiva sobre cualquier clase y cualquier relacional es irreflexiva sobre $\emptyset$. Si R es reflexiva e irreflexiva sobre A, entonces $A = \emptyset$. Es decir, una relacional sobre una clase no vacía puede tener a lo más una de las dos características mencionadas, aunque no necesariamente alguna de ellas. $R \setminus Id(A)$ es una relacional irreflexiva sobre A. **ABF** implica que $\in$ es irreflexiva sobre $\mathscr{V}$.

Teorema 4. Sea A una clase y R una relacional.

$$R \text{ es reflexiva sobre } A \iff R^{(c)} := \{\langle x,y\rangle : \langle x,y\rangle \notin R\} \text{ es irreflexiva sobre } A.$$

[4]También se usan las expresiones "arreflexiva sobre A", "antirreflexiva sobre A" o "aliorrelativa sobre A".

[5]Esto se resume diciendo que la irreflexividad sobre una clase se hereda a subrelaciones y que una relación que es reflexiva sobre una clase también lo es sobre las subclases de ésta última.

Relacionales simétricas sobre A.

Definición 3. Una relacional R es *simétrica sobre A* si y sólo si $\forall x, y \in A\,(xRy \longrightarrow yRx)$, o bien

$$\forall x \forall y \big((x \in A \;\&\; y \in A \;\&\; xRy) \longrightarrow yRx\big).$$

Id_A, $A \times A$, $\emptyset$ son los ejemplos típicos de relacionales simétricas sobre una clase A. Por otra parte, $\leq$ **no** es simétrica sobre $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, según sea el caso), del mismo modo que $|$ **no lo es** sobre $\mathbb{N}$ ni sobre $\mathbb{Z}$.

Observaciones. Dadas relacionales R, S y clases A, B.

✄ Si R es simétrica sobre A y $B \subseteq A$, entonces R es simétrica sobre B[6].

El "regreso" es falso.

Ejemplo. Consideremos $B := \{1,2,3,4\}$. $R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$, $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ y $S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 6,7\rangle\}$. Tenemos que

1. $R \subseteq S$ y S es simétrica sobre B, pero R **no** es simétrica sobre B, pues $1,3 \in B$, $\langle 1,3\rangle \in R$, pero $\langle 3,1\rangle \notin R$.
2. $B \subseteq A$ y S es simétrica sobre B, pero S **no** es simétrica sobre A.

Teorema 5. Sea R una relacional y A una clase. Son equivalentes las siguientes afirmaciones.

i. R es simétrica sobre A.

ii. R^{-1} es simétrica sobre A.

iii. $R\restriction_A = R^{-1}\restriction_A$.

iv. $R\restriction_A \subseteq R^{-1}\restriction_A$.

Teorema 6. Cerradura simétrica. Sean R, S relacionales y A una clase.

- $\mathscr{CS}(R) := R \cup R^{-1}\restriction_A$ es una relacional simétrica sobre A.
- Si S es una relacional simétrica sobre A y $R \subseteq S$, $\mathscr{CS}(R) \subseteq S$.

Es decir, $\mathscr{CS}(R)$[7] es la $\subseteq$–menor relacional simétrica sobre A que contiene a R.
Demostración. Para el primer inciso sean $\underline{x, y \in A}$ tales que $\langle x,y\rangle \in \mathscr{CS}(R)$. Tenemos dos casos, desarrollamos el primero:
$xRy \Longleftrightarrow yR^{-1}x \Longleftrightarrow y(R^{-1}\restriction_A)x \Longrightarrow \langle y,x\rangle \in \mathscr{CS}(R)$.
El segundo caso, $y(R^{-1}\restriction_A)x$, es análogo.
Para el segundo inciso, basta mostrar que $R^{-1}\restriction_A \subseteq S$.
$u(R^{-1}\restriction_A)v \Longleftrightarrow u,v \in A \;\&\; uR^{-1}v \Longleftrightarrow u,v \in A \;\&\; vRu \Longrightarrow$
(pues $R \subseteq S$) $u,v \in A \;\&\; vSu \Longrightarrow$ (S es simétrica sobre A) uSv. ■

[6]Que una relacional sea simétrica sobre una clase, se hereda a a las subclases de ella.

[7]Más ún, resulta ser única, por lo que la llamamos *la cerradura (o clausura) simétrica de R sobre A* o bien *la relacional simétrica sobre A generada por R*.

Teorema. Sea R una relacional y A una clase.

$$\mathscr{CS}(R) \in \mathscr{V} \iff R \in \mathscr{V} \;\&\; A \in \mathscr{V}.$$

Proposición 2. Sea $a \in \mathscr{V}$ y $R \subseteq a \times a$ una relación[8]. Definamos la clase X' como

$$X' := \{S : S \text{ es relación simétrica sobre } a \;\; \& \;\; R \subseteq S.\}$$

Demuestre lo siguiente:

† $\bigcap X' \in \mathscr{V}$.

† $R \subseteq \bigcap X'$.

† $\bigcap X'$ es una relación simétrica sobre a.

†† $\mathscr{CS}(R) = \bigcap X'$.

Demostración. $a \times a \in X' \implies \bigcap X' \in \mathscr{V}$. Para toda $x \in X'$, $R \subseteq x \implies R \subseteq \bigcap X'$.
$x, y \in A \;\&\; \langle x, y\rangle \in \bigcap X' \iff x, y \in A \;\&\; \forall r \in X' \left(\langle x, y\rangle \in r\right) \implies$(Pues toda $r \in X'$ es simétrica sobre A) $\forall r \in X' \left(\langle y, x\rangle \in r\right) \iff \langle y, x\rangle \in \bigcap X'$.
Por los dos incisos anteriores y el teorema **6**, $\mathscr{CS}(R) \subseteq \bigcap X'$.
$\mathscr{CS}(R) \in X' \implies \bigcap X' \subseteq \mathscr{CS}(R)$. ■

Teorema 7. Sea A una clase y R una relacional.

$$R \text{ es simétrica sobre } A \iff R^{(c)} \text{ es simétrica sobre } A.$$

Demostración. $R^{(c)}$ **no** es simétrica sobre $A \iff \exists x, y \in A \left(xR^{(c)}y \;\&\; y\not R^{(c)}x\right)$
$\iff \exists x, y \in A \left(x\not R y \;\&\; yRx\right) \iff \exists x, y \in A \left(yRx \;\&\; x\not R y\right) \iff R$ no es simétrica sobre A.
■

Relacionales asimétricas sobre A.

Definición 4. Una relacional R es *asimétrica sobre A* si y sólo si
$\forall x, y \in A \left(xRy \longrightarrow y\not R x\right)$, o bien

$$\forall x \forall y \left((x \in A \;\&\; y \in A \;\&\; xRy) \longrightarrow y\not R x\right).$$

Dicho de otra manera $\neg\exists x, y \in A \left(xRy \;\&\; yRx\right)$.

$\leq$ no es una relación asimétrica sobre $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$), pero $<$ sí lo es. $\mid$ tampoco lo es sobre $\mathbb{N}$, pero $\mid \setminus Id_{\mathbb{N}}$ sí es asimétrica sobre $\mathbb{N}$[9].

[8] ¿Porqué R es conjunto?

[9] ¿Ocurre lo con $\mid \setminus Id_{\mathbb{Z}}$ sobre $\mathbb{Z}$?

Observaciones. Dadas relacionales R, S y clases A, B.

- Si R es asimétrica sobre A y $B \subseteq A$, entonces R es asimétrica sobre B[10].
- Si R es asimétrica sobre A y $S \subseteq R$, entonces S es asimétrica sobre A[11].
- Si R es asimétrica sobre A, entonces R es irreflexiva sobre A.

Demostración. Ejercicio. ∎

Teorema 8. Sea R una relacional y A una clase. Son equivalentes:

i. R es asimétrica sobre A.
ii. R^{-1} es asimétrica sobre A.
iii. $R^{-1}\restriction_A \subseteq R^{(c)}$.

Observaciones.

- $\emptyset$ es asimétrica sobre cualquier clase y cualquier relacional es asimétrica sobre $\emptyset$.
- Si R es simétrica y asimétrica sobre A, entonces $A = \emptyset$ o $R = \emptyset$. Es decir, una relacional no vacía sobre una clase no vacía puede tener a lo más una de las dos características mencionadas, aunque no necesariamente alguna de ellas.
- **ABF** implica que $\in$ es asimétrica sobre $\mathscr{V}$.
- $\subseteq$ es asimétrica sobre A si y sólo si $A = \emptyset$.

Proposición 3. Sea A una clase y R una relacional. $R \setminus R^{-1}\restriction_A$ es una relacional asimétrica sobre A.

Relacionales antisimétricas sobre A.

Definición 5. Dada una relacional R, R es *antisimétrica sobre* A si y sólo si $\forall x, y \in A\,\big((xRy \ \&\ yRx) \longrightarrow x = y\big)$, o bien

$$\forall x \forall y \big((x \in A \ \&\ y \in A \ \&\ xRy \ \& yRx) \longrightarrow x = y\big).$$

La relación $\mid$ es antisimétrica sobre $\mathbb{N}$, más no sobre $\mathbb{Z}$.

Observaciones. Dadas relacionales R, S y clases A, B.

- Si R es antisimétrica sobre A y $B \subseteq A$, R es antisimétrica sobre B[12].

[10] Que una relacional sea asimétrica sobre una clase, se hereda a a las subclases de ella.
[11] La característica de ser asimétrica sobre una clase se hereda a subrelaciones (sobre la misma clase).
[12] Que una relacional sea antisimétrica sobre una clase, se hereda a a las subclases de ella.

✂ Si R es antisimétrica sobre A y $S \subseteq R$, S es antisimétrica sobre A[13].

Demostración. Ejercicio. ■

Teorema 9. Sean R una relacional y A una clase. Son equivalentes:

i. R es antisimétrica sobre A.

ii. R^{-1} es antisimétrica sobre A.

iii. $\left(R \cap R^{-1}\right)\restriction_A \subseteq Id_A$.

Relacionales transitivas sobre A.

Definición 6. Decimos que la relacional R es *transitiva sobre* A si y sólo si $\forall x.y.z \in A\left((xRy \ \& \ yRz) \longrightarrow xRz\right)$, o bien

$$\forall x \forall y \forall z\left((x \in A \ \& \ y \in A \ \& \ z \in A \ \& \ xRy \ \& \ yRz) \longrightarrow xRz\right).$$

$\leq$, $<$ son transitivas sobre $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. $\mid$ es transitiva sobre $\mathbb{N}$ y sobre Z. $\subseteq$ es transitiva sobre cualquier clase. $\in$ no es transitiva sobre $\left\{\emptyset, \{\emptyset\}\{\{\emptyset\}\}\right\}$, pero sí lo es sobre $\left\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\right\}$

Observaciones. Dadas R una relacional y A, B clases.

✂ Si R es transitiva sobre A y $B \subseteq A$, entonces R es transitiva sobre B[14].

✂ Si R es irreflexiva y transitiva sobre A, entonces R es asimétrica sobre A.

Teorema 10. Sea R una relacional y A una clase. Son equivalentes

- R es transitiva sobre A.
- R^{-1} es transitiva sobre A.
- $(R\restriction_A) \circ (R\restriction_A) \subseteq (R\restriction_A)$.

Proposición 4. Sean $a \in \mathscr{V}$, $R \subseteq a \times a$ y S relacionales[15]. Definamos la clase X'' como

$$X'' := \left\{\mathbf{s} : \mathbf{s} \text{ es relación transitiva sobre } a \ \& \ R \subseteq \mathbf{s}.\right\}$$

Se tienen las siguientes afirmaciones:

† $\bigcap X'' \in \mathscr{V}$.

† $R \subseteq \bigcap X''$.

[13] La característica de ser antisimétrica sobre una clase se hereda a subrelaciones (sobre la misma clase).

[14] Que una relacional sea transitiva sobre una clase, se hereda a a las subclases de ella.

[15] ¿Porqué R es conjunto?

† $\bigcap X''$ es una relación transitiva sobre a.

†† Si S es relacional transitiva sobre a y $R \subseteq S$, entonces $\bigcap X'' \subseteq S$.

Demostración. $a \times a \in X'' \Longrightarrow \bigcap X'' \in \mathscr{V}$.
Para toda $\mathbf{s} \in X$, se tiene que $R \subseteq \mathbf{s} \Longrightarrow R \subseteq \bigcap X$.
Sean $x, y, z \in a$. $\langle x, y\rangle \in \bigcap X''$ & $\langle y, z\rangle \in \bigcap X'' \Longleftrightarrow \forall \mathbf{s} \in X''\big(\langle x, y\rangle \in \mathbf{s}$ & $\langle y, z\rangle \in \mathbf{s}\big)$
$\Longrightarrow \forall \mathbf{s} \in X''\big(\langle x, z\rangle \in \mathbf{s}\big)$ (pues toda $\mathbf{s} \in X''$ es transitiva sobre a y $x, y, z \in a$).
$\Longleftrightarrow \langle x, z\rangle \in \bigcap X''$.

El último inciso necesita solamente ver que $R \subseteq S\restriction_a$ y que $S\restriction_a \in \mathscr{V}$. ■

Relacionales antitransitivas sobre A.

Definición 7. Una relacional R es *antitransitiva sobre A*[16] si y sólo si $\forall x.y.z \in A\big((xRy \ \& \ yRz) \longrightarrow x\not{R}z\big)$, o bien

$$\forall x \forall y \forall z \big((x \in A \ \& \ y \in A \ \& \ z \in A \ \& \ xRy \ \& \ yRz) \longrightarrow x\not{R}z\big).$$

Relacionales dicotómicas sobre A.

Definición 8. La relacional R es *dicotómica sobre A* si y sólo si

$$\forall x \in A\, \forall y \in A\, \big(xRy \ \vee \ yRx\big).$$

Relaciones tricotómicas sobre A.

Definición 9. La relacional R es *tricotómica sobre A* si y sólo si

$$\forall x \in A\, \forall y \in A\, \big(xRy \ \vee \ yRx \ \vee \ x = y\big).$$

[16] Leáse también como "*intransitiva sobre A*".