Relacionales de Orden.

Preordenes

Definición 1. Decimos que la relacional $\mathbf{R}$ *preordena a [la clase] A* si y sólo si $\mathbf{R}$ es reflexiva y transitiva sobre A.

Definición 2. $\langle a, \mathbf{r} \rangle$ es un *preorden* si y sólo si

$$\mathbf{r} \subseteq a \times a \ \ \& \ \ \mathbf{r} \ \text{ preordena a } a.$$

Notación. $\mathbf{PRE} := \Big\{ \langle a, \mathbf{r} \rangle : \langle a, \mathbf{r} \rangle \text{ es un preorden.} \Big\}$

Órdenes Parciales, Totales y Densos

Veremos dos tipos de relacionales, las que son órdenes parciales reflexivos (**R**) sobre una clase y las que son órdenes parciales estrictos (**E**).

Definición 3. $\mathbf{R}$ es un *Orden Parcial Reflexivo sobre A*[1] si y sólo si

- $\mathbf{R}$ es reflexiva sobre A **y**
- $\mathbf{R}$ es transitiva sobre A **y**
- $\mathbf{R}$ es antisimétrica sobre A.

Es en este contexto o bajo estas ciscunstancias que, para $u, v \in A$, $u\mathbf{R}v$ se entiende o se lee como "u es menor o igual a v" o como "v es mayor o igual a u".

Cualquier relacional que ordene parcialmente, en sentido estricto, a una clase A, la preordena.

Definición 4. $\mathbf{R}$ es un *Orden Total (o Lineal) Reflexivo sobre A*[2] si y sólo si

- $\mathbf{R}$ es un Orden Parcial Reflexivo sobre A **y**
- $\mathbf{R}$ es dicotómica sobre A.

[1] También se suele decir que $\mathbf{R}$ ordena parcialmente a [la clase] A en sentido reflexivo.

[2] O bien, que $\mathbf{R}$ ordena totalmente, en sentido reflexivo, a [la clase] A.

Como ya vimos en clase, para que **R** sea orden total reflexivo sobre A, basta pedir que **R** sea transitiva, antisimétrica y dicotómica sobre A, pues ésta última implica que **R** sea reflexiva sobre A.

Definición 5. **E** es un *Orden Parcial Estricto sobre* A[3] si y sólo si

- **E** es irreflexiva sobre A **y**
- **E** es transitiva sobre A.

De las anteriores, se sigue que **E** debe ser asimétrica sobre A.

Definición 6. **E** es un *Orden Lineal (o Total) Estricto sobre* A[4] si y sólo si

- **E** es un Orden Parcial Estricto sobre A **y**
- **E** es tricotómica sobre A.

Bajo estas circunstancias, para $x, y \in A$, $x\mathbf{E}y$ se entiende o lee como "x es estrictamente menor que y" o "y es estrictamente mayor que x".

Proposición 1. Sea A una clase.

✠ Para cada orden parcial reflexivo **R** sobre A , hay un orden parcial estricto sobre A asociado, $(\mathbf{R})_E$.

✠ Para cada orden parcial estricto **E** sobre A, hay un orden parcial reflexivo sobre A asociado, $(\mathbf{E})_R$.

Además, se tiene que $\left((\mathbf{R})_E\right)_R = \mathbf{R}$ y $\left((\mathbf{E})_R\right)_E = \mathbf{E}$.

Demostración. Tenemos que

$$(\mathbf{R})_E := \mathbf{R} \setminus Id_A \quad \text{y} \quad (\mathbf{E})_R := \mathbf{E} \cup Id_A.$$

Los detalles se dejan al lector. ■

Notación. Cuando hablemos de órdenes nos estaremos refiriendo a cualquiera de los dos tipos, ya sea reflexivo o su asociado, el estricto. Usaremos $<$ para hablar de orden parcial en sentido estricto y $\leq$ para hablar del orden parcial en sentido reflexivo que está asociado a $\leq$, y visceversa.

Definición 7. $\langle a, \mathbf{r} \rangle$ es un *COnjunto Parcialmente Ordenado* si y sólo si

- $\mathbf{r} \subseteq a \times a$.
- $\mathbf{r}$ ordena parcialmente a a.

[3] También solemos decir que **E** ordena parcialmente, en sentido estricto a [la clase] A.

[4] O bien, que **E** ordena totalmente a [la clase] A, en sentido estricto.

Notación. $\mathbf{COPO} = \Big\{\langle a,\mathbf{r}\rangle : \langle a,\mathbf{r}\rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado$\Big\}$ y

$$\langle a,\mathbf{r}\rangle \in \mathbf{COPO} \iff \langle a,\mathbf{r}\rangle \text{ es un conjunto parcialmente ordenado.}$$

Definición 8. $\langle a,\mathbf{r}\rangle$ es un *COnjunto Totalmente Ordenado* si y sólo si

- $\mathbf{r} \subseteq a \times a$.
- $\mathbf{r}$ ordena totalmente a a.

Notación. $\mathbf{COTO} = \Big\{\langle a,\mathbf{r}\rangle : \langle a,\mathbf{r}\rangle$ es un conjunto totalmente ordenado$\Big\}$ y

$$\langle a,\mathbf{r}\rangle \in \mathbf{COTO} \iff \langle a,\mathbf{r}\rangle \text{ es un conjunto totalmente ordenado.}$$

Definición 9. $\langle a,\mathbf{r}\rangle$ es un *COnjunto Densamente Ordenado*[5] si y sólo si

1. $\langle a,\mathbf{r}\rangle \in \mathbf{COTO}$.
2. **i)** a tiene al menos dos elementos, es decir; $\exists x,y \in a\,(x \neq y)$.

   ii) Entre dos elementos distintos de a siempre hay un tercero, esto es;

$$\forall x,y \in a\Big(\big(x\mathbf{r}y \;\&\; x \neq y\big) \longrightarrow \exists z \in a\big(x\mathbf{r}z \;\&\; z\mathbf{r}y \;\&\; x \neq y \;\&\; y \neq z\big)\Big).$$

Notación. $\mathbf{CODO} = \Big\{\langle a,\mathbf{r}\rangle : \langle a,\mathbf{r}\rangle$ es un conjunto densamente ordenado$\Big\}$ y

$$\langle a,\mathbf{r}\rangle \in \mathbf{CODO} \iff \langle a,\mathbf{r}\rangle \text{ es un conjunto densamente ordenado.}$$

Ejemplos. Aceptando que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ son conjuntos, tenemos:

- ✓ $\langle \mathbb{Z}, | \rangle \in \mathbf{PRE} \setminus \mathbf{COPO}$, mientras que $\langle \mathbb{N}\setminus\{0\}, |\rangle \in \mathbf{COPO}$.
- ✓ La relación "*a es subsucesión de b*" preordena al conjunto de las sucesiones de números reales (${}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$), más **no** ordena parcialmente a tal conjunto.
- ✓ $\langle \mathbb{N}^{+}, |\rangle \in \mathbf{COPO} \setminus \mathbf{COTO}$.
- ✓ $\langle a, Id_a\rangle \in \mathbf{COPO}$. Además; $\langle a, Id_a\rangle \in \mathbf{COTO}$ si y sólo si $a = \emptyset$ o hay algún conjunto b, tal que $a = \{b\}$.
- ✓ $\langle \wp(a), \subseteq\rangle \in \mathbf{COPO}$. Además; $\langle \wp(a), \subseteq\rangle \in \mathbf{COTO}$ si y sólo si $a = \emptyset$ o hay un conjunto b, tal que $a = \{b\}$.
- ✓ $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle, \langle \mathbb{Z}, \leq\rangle \in \mathbf{COTO} \setminus \mathbf{CODO}$.
- ✓ $\langle \mathbb{Q}, \leq\rangle, \langle \mathbb{R}, \leq\rangle \in \mathbf{CODO}$.

Problema. Sean A una clase y $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ una relacional reflexiva y antisimétrica sobre A. Son equivalentes:

- $\mathbf{R}$ es un orden total [reflexivo] sobre A.
- $\mathbf{R}$ y $(A \times A)\setminus \mathbf{R}$ son transitivas sobre A.

Problema. Sean A una clase y $\mathbf{R} \subseteq A \times A$ una relacional transitiva sobre A. Son equivalentes:

- $\mathbf{R}$ es un orden lineal [reflexivo] sobre A.
- $(A \times A)\setminus \mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1} \setminus Id_A$.

[5] Esta definición se puede generalizar fácilmente para una clase A y una relacional $\mathbf{R}$.

Elementos y Conjuntos Notables

En esta sección, A es una clase y $<$ es un orden parcial sobre A[6].

Definición 10. Sean $x, y \in A$. Decimos que x *es $<$-predecesor de* y o que y *es $<$-sucesor de* x si y sólo si $x < y$. Además, si no hay $y \in A$ tal que $x < y$ y $y < z$, decimos que x *es $<$-predecesor inmediato de* y o que y *es $<$-sucesor inmediato de* x.

Definición 11. Sean $x \in A$ y $B \subseteq A$.

- x es *$<$-maximal de* $B \iff x \in B \ \& \ \neg\exists z\left(z \in B \ \& \ x < z\right)$ o, **de forma equivalente**, $x \in B \ \& \ \forall z\left(x < z \longrightarrow z \notin B\right)$.
- x es *$<$-minimal de* $B \iff x \in B \ \& \ \neg\exists z\left(z \in B \ \& \ z < x\right)$ o, **de forma equivalente**, $x \in B \ \& \ \forall z\left(z < x \longrightarrow z \notin B\right)$.

Cuando no se preste a confusión, escribiremos maximal (minimal) en vez de $<$-maximal ($<$-minimal). Un elemento minimal (maximal) de B no siempre es único.

Definición 12. Sean $x \in A$ y $B \subseteq A$.

- x es *$<$-máximo de* $B \iff x \in B \ \& \ \forall y \in B\left(y \leq x\right)$. **Dicho de otro modo**; $x \in B \ \& \ \forall y\Big(\left(y \in B \ \& \ x \neq y\right) \longrightarrow y < x\Big)$.
- x es *$<$-mínimo de* $B \iff x \in B \ \& \ \forall y \in B\left(x \leq y\right)$. **De manera equivalente**; $x \in B \ \& \ \forall y\Big(\left(y \in B \ \& \ x \neq y\right) \longrightarrow x < y\Big)$.

Cuando no haya riesgo de confusión alguna, escribiremos máximo (mínimo) en vez de $<$-máximo ($<$-mínimo). En realidad, en las últimas dos definiciones hemos establecido cuándo un elemento cumple ciertas propiedades.

Notación. En caso de existir un u que *sea*[7] $<$-mínimo de B ($<$-máximo de B), se suele decir que B tiene $<$-mínimo ($<$-máximo) y denotamos esto por $u = \min_< B$ ($u = \max_< B$).

Observaciones. Sean $B \subseteq A$ y $u \in A$.

- ✓ u es $<$-máximo de $B \iff u$ es $<^{-1}$-mínimo ($>$-mínimo) de B.
- ✓ u es $<$-maximal de $B \iff u$ es $<^{-1}$-minimal ($>$-minimal) de B.

Proposición 2. Sean $B \subseteq A$.

- B tiene a lo más un $<$-mínimo ($<$-máximo).

[6] siguiendo nuestra convención, $\leq$ es un orden parcial reflexivo sobre A y $<$ su orden parcial estricto asociado.

[7] De forma más precisa, deberíamos decir "que tenga la propiedad de ser..."

- Todo $<$-mínimo ($<$-máximo) de B es $<$-minimal ($<$-maximal) de B.

Demostración. En clase... ■

Problema. Si $<$ es un orden parcial sobre A y $B \subseteq A$ tiene un único $<$-minimal ($<$-maximal), digamos m, ¿es m un $<$-mínimo ($<$-máximo) de B?

Definición 13. Sean $u \in A$ y $B \subseteq A$.

- u es *$<$-cota superior de B* $\iff \forall y \in B \left(y \leq x \right)$.
- u es *$<$-cota inferior de B* $\iff \forall y \in B \left(x \leq y \right)$.
- $\mathfrak{CS}_A(B) := \left\{ x \in A : x \text{ es } <\text{-cota superior de } B \right\}$.
- $\mathfrak{CI}_A(B) := \left\{ x \in A : x \text{ es } <\text{-cota inferior de } B \right\}$.

Cuando no se preste a confusión, escribiremos cota inferior (superior) en vez de $<$-cota inferior (superior). El mínimo (máximo) es una cota inferior (superior).

Definición 14. Sean $x \in A$ y $B \subseteq A$.

- x es *$<$-supremo de B* si y sólo si $x = \text{mín}_< \mathfrak{CS}_A(B)$.
- x es *$<$-ínfimo de B* si y sólo si $x = \text{máx}_< \mathfrak{CI}_A(B)$.

Cuando no se preste a confusión, escribiremos supremo (ínfimo) en vez de $<$-supremo ($<$-ínfimo). En general, tales elementos no existen. Aunque el máximo (mínimo) no exista, el supremo (ínfimo) puede existir.

Notación. En caso de existir un u que *sea*[8] $<$-ínfimo de B ($<$-supremo de B), se suele decir que B tiene $<$-ínfimo ($<$-supremo) y denotamos esto por $u = \text{ínf}_< B$ ($u = \sup_< B$).

Observaciones. Sean $B \subseteq A$ y $u \in A$.

- ✓ u es $<$-supremo de $B \iff u$ es $<^{-1}$-ínfimo ($>$-ínfimo) de B.
- ✓ $\emptyset$ tiene $<$-supremo $\iff A$ tiene $<$-mínimo.
- ✓ $\emptyset$ tiene $<$-ínfimo $\iff A$ tiene $<$-máximo.

Proposición 3. Sean $B \subseteq A$ y $v \in A$. Se tienen las siguientes afirmaciones

- B tiene a lo más un $<$-ínfimo ($<$-supremo).
- Si $v = \text{mín}_< B$ ($v = \text{máx}_< B$), entonces $v = \text{ínf}_< B$ ($v = \sup_< B$).
- Si $v \in B$ y $v = \text{ínf}_< B$ ($v = \sup_< B$), entonces $v = \text{mín}_< B$ ($v = \text{máx}_< B$).

Demostración. En clase y Ejercicios... ■

[8] De forma más precisa, deberíamos decir “que tenga la propiedad de ser...”

Buenos Órdenes

Definición 15. Sean A una clase y $\mathbf{R}$ una relacional. Decimos que $\mathbf{R}$ *bien ordena a A* si y sólo si

1. $\mathbf{R}$ ordena parcialmente a A,
2. Todo ***subconjunto*** no vacío de A tiene un elemento $\mathbf{R}$-mínimo, es decir;

$$\forall x\Big((x \neq \emptyset \ \& \ x \subseteq A) \longrightarrow \exists y\Big(y \in x \ \& \ \forall z \in x\big(y\mathbf{R}z \ \vee \ y = z\big)\Big)\Big).$$

$$\forall x\Big((x \neq \emptyset \ \& \ x \subseteq A) \longrightarrow \exists y\Big(y \in x \ \& \ \forall z \in x\big(y \neq z \longrightarrow y\mathbf{R}z\big)\Big)\Big).$$

Afirmación. Si $\mathbf{R}$ bien ordena a la clase A, entonces la ordena totalmente.
Demostración. Haremos el caso en que $\mathbf{R}$ es un orden parcial reflexivo sobre A, y falta ver que $\mathbf{R}$ es dicotómica sobre A. Sean $u, v \in A$. Tenemos dos casos:

✓ $u = v$. Como $\mathbf{R}$ es reflexiva sobre A, se tiene que $u\mathbf{R}v$.

✓ $u \neq v$. $u, v \in A \implies \emptyset \neq \{u, v\}$ tiene $\leq$-mínimo.
Digamos, sin pérdida de generalidad, que u es $\mathbf{R}$-mínimo de $\{u, v\}$. Como $v \in \{u, v\}$ y $u \neq v$, entonces $u\mathbf{R}v$.

■

Definición 16. Decimos que $\langle a, \mathbf{r}\rangle$ es un *COnjunto Bien Ordenado* si y sólo si

- $\langle a, \mathbf{r}\rangle \in \mathbf{COPO}$.
- $\mathbf{r}$ bien ordena a A.

Notación. $\mathbf{COBO} = \{\langle a, \mathbf{r}\rangle : \langle a, \mathbf{r}\rangle$ es un conjunto bien ordenado$\}$ y

$$\langle a, \mathbf{r}\rangle \in \mathbf{COBO} \iff \langle a, \mathbf{r}\rangle \text{ es un conjunto bien ordenado.}$$

Afirmación. $\mathbf{COBO} \subseteq \mathbf{COTO}$.

Relacionales Bien Fundadas

Definición 17. Sean A una clase y $\mathbf{R}$ una relacional. Decimos que $\mathbf{R}$ *bien funda a A* (o *es bien fundadda sobre* $\mathbf{R}$ si y sólo si Todo ***subconjunto*** no vacío de A tiene un elemento $\mathbf{R}$-minimal, es decir;

$$\forall x\Big((x \neq \emptyset \ \& \ x \subseteq A) \longrightarrow \exists y\Big(y \in x \ \& \ \forall z \in x\big(z \not\mathbf{R} y\big)\Big)\Big).$$

En caso que $A = CMP(R)$, decimos simplemente que R *en bien fundada*.

A continuación listamos algunas formas equivalentes de la definición anterior:

i. $\forall x \subseteq A\left(x \neq \emptyset \longrightarrow \exists y \in x \forall z \in x\left(z \not\mathbf{R} y\right)\right)$.

ii. $\forall x \subseteq A\left(x \neq \emptyset \longrightarrow \exists y \in x \forall z\left(z\mathbf{R}y \longrightarrow z \notin x\right)\right)$.

iii. $\forall x \subseteq A\left(x \neq \emptyset \longrightarrow \exists y \in x \neg\exists z\left(z \in x \ \&\ z\mathbf{R}y\right)\right)$.

iv. $\forall x \subseteq A\left(\forall y \in x \exists z\left(z \in x \ \&\ z\mathbf{R}y\right) \longrightarrow x = \emptyset\right)$.

Observaciones. Sea A una clase y $\mathbf{R}$ una relacional.

- Si $\mathbf{R}$ bien funda a A, entonces $\mathbf{R}$ es irreflexiva y asimétrica sobre A.
- **ABF** se puede reformular como: $\in$ bien funda a $\mathscr{V}$.

Proposición 4. Sea A una clase. Si $<$ ordena totalmente a A y $<$ es bien fundada sobre A, entonces $<$ bien ordena a A y visceversa.

Definición 18. Decimos que $\langle a, \mathbf{r}\rangle$ es un *COnjunto Bien Fundado* si y sólo si

- $\mathbf{r} \subseteq a \times a$.
- $\mathbf{r}$ es bien fundada sobre A.

Notación. $\mathbf{COBF} = \{\langle a, \mathbf{r}\rangle : \langle a, \mathbf{r}\rangle$ es un conjunto bien fundado$\}$ y

$$\langle a, \mathbf{r}\rangle \in \mathbf{COBF} \Longleftrightarrow \langle a, \mathbf{r}\rangle \text{ es un conjunto bien fundado.}$$

Afirmación. $\mathbf{COBF} \cap \mathbf{COTO} = \mathbf{COBO}$[9]. ***Demostración.*** Inmediato de la proposición anterior. ■

[9]En vista de las observaciones anteriores, esta proposición sólo tiene sentido al hablar de un orden total en sentido estricto.