Tarea 0.

N.N.M.

1. Lenguaje y Sistemas Axiomaticos.

1. Describa detalladamente las semejanzas y diferencias de los siguientes dos lenguajes.

	Símbolos del alfabeto	Reglas de Formación
$\mathscr{L}_1$	$a \;\; b$	Una fórmula (bien formada) empieza con a y termina con b.
$\mathscr{L}_2$	$a \;\; b$	Una fórmula (bien formada) tiene longitud a lo más 4.

   ¿Cómo son todas las posibles expresiones en ambos lenguajes?

2. En el discurso de los números naturales, compare los siguientes lenguajes de primer orden:
   - $\{\leq, 0\}$.
   - $\{\leq, \sigma, +, 0\}$.
   - $\{\leq, \sigma, +, \cdot, 0, 1\}$.

3. Pruebe a detalle las proposiciones **I.1.14** y**I.1.15** de las notas sobre Sistemas Axiomáticos (p. 9).

4. Ejercicios **I.1.5**, **I.1.6** y **I.1.8** de las notas sobre Sistemas Axiomáticos (p. 11).

5. * De un lenguaje apropiado para el Sistema de numeración romano. ¿Que fórmulas son permitidas? ¿Qué reglas de formación justifican lo enterior?

2. Axiomas de la Teoría de Conjuntos I. (ver Notas 1.01 de El Profesor.)

1. Demuestre que el conjunto cuya existencia es postulado por $\mathbf{ZF_3}$ es único.

2. Explique detalladamente porqué $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \neq \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$. ¿Cómo se utiliza $\mathbf{ZF_1}$ en la justificación de lo anterior? ¿Puede ser omitido en tal justificación?

3. Demuestre que el conjunto cuya existencia es postulado por $\mathbf{ZF_4}$ es único.

4.
   - Pruebe que $\bigcup \emptyset = \bigcup \{\emptyset\} = \emptyset$.
   - Enumere todos los posibles conjuntos a tales que $\bigcup a = \emptyset$. Justifique.

5. Demuestre, con los axiomas que hasta ahora tiene, que la siguiente fórmula es un teorema de **ZFC**.

$$\forall v_0 \left(\bigcup \{v_0\} = v_0 \right).$$

6. Demuestre por contradicción que, dado un conjunto b,

$$\forall x (x \in \emptyset \to x \in b)$$

es un teorema. ¿Es posible, mediante contradicción, establecer

$$\exists x (x \in \emptyset \to x \in b)?$$

Justifique.